2022—2023学年(下)高二年级阶段性测试(开学考)

数 学

考生注意:

1. 答题前,考生务必将自己的姓名、考生号填写在试卷和答题卡上,并将考生号条形码粘贴在答题卡上的指定位置.
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑.如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.回答非选择题时,将答案写在答题卡上.写在本试卷上无效.
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回.

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知点 $A(2,3)$,$B(-1,x)$,直线 AB 的倾斜角为 $\frac{2\pi}{3}$,则 $x=$

A. $3-3\sqrt{3}$　　B. $3+\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $3+3\sqrt{3}$　　D. 6

2. 在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=\frac{1}{4}$,$a_{n+1}=1-\frac{2}{a_n+1}$,则 $a_{2\,023}=$

A. -4　　B. $-\frac{3}{5}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{5}{3}$

3. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{m+4}-\frac{y^2}{m}=1$ 的一个焦点为 $(0,\sqrt{10})$,则该双曲线的渐近线方程为

A. $y=\pm\frac{\sqrt{21}}{7}x$　　B. $y=\pm\frac{\sqrt{21}}{3}x$　　C. $y=\pm\frac{7}{3}x$　　D. $y=\pm\frac{3}{7}x$

4. 在各项均为正数且递增的等比数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1a_7=576$,$a_3+a_4+a_5=84$,则 $a_9=$

A. 96　　B. 192　　C. 384　　D. 768

5. 在空间直角坐标系中,已知点 $A(2,3,0)$,$B(-1,2,3)$,$C(8,x,y)$,若 A,B,C 三点共线,则 $|AC|=$

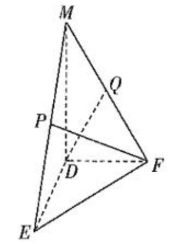
A. $\sqrt{19}$　　B. $2\sqrt{19}$　　C. $5\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{171}$

6. 已知圆 $C:x^2+y^2+4x+2y-11=0$,过点 $(2,1)$ 作圆 C 的切线 m,则 m 的方程为

A. $x=2$　　B. $3x+4y-10=0$

C. $3x+4y-10=0$ 或 $x=2$　　D. $3x+4y-10=0$ 或 $3x-4y-2=0$

7. 如图,在三棱锥 $M-DEF$ 中,$MD\perp$ 平面 DEF,$DE\perp DF$,$DE=DF=2$,$MD=4$,P,Q 分别为 ME,MF 的中点,则异面直线 FP,DQ 所成角的余弦值为



A. $\frac{2\sqrt{5}}{15}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{205}}{15}$

8. 已知直线 $n:5x+y+2=0$,点 $A(1,0)$ 关于直线 $x+y+3=0$ 的对称点为 B,直线 m 经过点 B,且 $m/\!/n$,则直线 m 的方程为

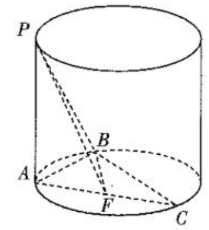
A. $5x+y+19=0$　　B. $x-5y-17=0$　　C. $5x+y-5=0$　　D. $5x+y+10=0$

9. 过抛物线 $x^2=6y$ 焦点的直线与抛物线交于点 M,N,若 $|MN|=12$,则直线 MN 的方程为

A. $2x+2y+3=0$　　B. $2x+2y-3=0$

C. $2x-2y+3=0$ 或 $2x+2y+3=0$　　D. $2x-2y+3=0$ 或 $2x+2y-3=0$

10. 如图,已知 PA 为圆柱的母线,BC 为圆柱的下底面直径,$AB=1$,$PA=3$,$AC=2$,F 为线段 AC 的中点,则点 C 到平面 PBF 的距离为



A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{\sqrt{19}}{19}$　　C. $\frac{2\sqrt{19}}{19}$　　D. $\frac{3\sqrt{19}}{19}$

11. 在数列 $\{a_n\}$ 中,$a_1=1$,$4a_{n+1}-a_n+3a_na_{n+1}=0$,数列 $\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 的前 n 项和为 T_n,若不等式 $\lambda\leqslant\frac{128a_n}{1+a_n}+\frac{3}{2}T_n$ 对 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立,则实数 λ 的取值范围为

A. $(-\infty,31]$　　B. $(-\infty,32]$　　C. $(-\infty,15]$　　D. $(-\infty,16]$

12. 已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点,过 F_1 的直线与椭圆 C 交于 M,N 两点,$|MF_2|-|MF_1|=a$,$|MF_1|+|NF_1|=|NF_2|$,则椭圆 C 的离心率为

A. $\frac{2}{5}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　　C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases} n+1, n \text{ 为奇数}, \\ 2^{\frac{n}{2}}, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 若 $a_k=a_{20}(k\neq 20)$，则 $k=$__________.

14. 在空间直角坐标系中，已知点 $A(2,3,1)$，$B(-1,1,-1)$，$C(0,-1,1)$，$D(1,1,x)$，若 A,B,C,D 四点共面，则 $x=$__________.

15. 已知点 $O(0,0)$，$A(2,0)$，若圆 $C:x^2+y^2-4x-4y+8-r^2=0(r>0)$ 上存在一点 P 使 $OP\perp AP$，则正实数 r 的取值范围为__________.

16. 已知 F_1,F_2 分别是双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点，A,B 分别在该双曲线的左、右支上，$|AF_1|=|BF_1|$，$AF_1\perp BF_1$，$AF_1/\!/BF_2$，则该双曲线的离心率为__________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

已知圆 C 过 $A(1,0)$，$B(0,1)$ 两点且圆心 C 在直线 $x+y-4=0$ 上.

（Ⅰ）求圆 C 的方程；

（Ⅱ）已知直线 $l:y=kx-1$ 被圆 C 截得的弦长为 $\frac{4\sqrt{30}}{5}$，求实数 k 的值.

18.（12 分）

已知 S_n 是各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$\sqrt{6S_n}$ 是 a_n 与 a_n+3 的等比中项.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）已知 $c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}+a_n+a_{n+1}+1}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

19.（12 分）

已知 $P(4,y_0)$ 是焦点为 F 的抛物线 $C:y^2=2px(0<p<4)$ 上一点，以 P 为圆心，$|PF|$ 为半径的圆过点 $M(7,0)$.

（Ⅰ）求 C 的方程；

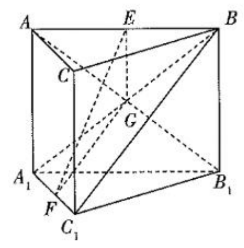
（Ⅱ）过点 $(2,0)$ 作直线 l 交抛物线于 A,B，求 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}$ 的最大值.

20.（12 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E,F 分别为 AB,A_1C_1 的中点，G 为侧面 ABB_1A_1 对角线的交点.

（Ⅰ）求证：平面 $EFG/\!/$ 平面 BB_1C_1C；

（Ⅱ）若 $A_1B_1=B_1C_1=C_1A_1=2$，$AA_1=3$，侧面 AA_1C_1C 为矩形，平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，求直线 BC 与平面 BA_1C_1 所成角的正弦值.

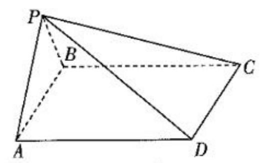


21.（12 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=\frac{\pi}{3}$，$AB=PA=2\sqrt{3}$，$PD=3\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{30}$.

（Ⅰ）求证：平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求平面 PAD 与平面 PCD 夹角的余弦值.



22.（12 分）

已知 F_1 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点，M 是椭圆 C 上一点，O 是坐标原点，N 是线段 MF_1 的中点，$|F_1N|+|ON|=2$，A_1,A_2 分别是椭圆 C 的左、右顶点，$|F_1A_2|=3|F_1A_1|$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）设过椭圆 C 的右顶点 A_2 与 y 轴平行的直线为 l，G 是椭圆上与 A_1,A_2 均不重合的一个动点，过 F_1 作直线 GA_2 的垂线交直线 l 于 H，求证：直线 GH 过定点.

2022—2023 学年(下)高二年级阶段性测试(开学考)

数学·答案

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.

1. C	2. A	3. B	4. D	5. B	6. C
7. A	8. A	9. D	10. D	11. A	12. B

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 1 023　　14. 1

15. $[\sqrt{5}-1,\sqrt{5}+1]$　　16. $\frac{\sqrt{10}}{2}$

三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **解析**　(Ⅰ)设 $C(a,4-a)$,半径为 $r(r>0)$,

$\therefore$ 圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-4+a)^2=r^2$, ……(1 分)

$\therefore \begin{cases}(0-a)^2+(1-4+a)^2=r^2,\\(1-a)^2+(0-4+a)^2=r^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\r=\sqrt{5},\end{cases}$ ……(3 分)

$\therefore$ 圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=5$. ……(5 分)

(Ⅱ)圆心 $C(2,2)$ 到直线 l 的距离 $d=\frac{|2k-2-1|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\frac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}$, ……(7 分)

由垂径定理得 $\left(\frac{|2k-3|}{\sqrt{k^2+1}}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{30}}{5}\right)^2=5$, ……(8 分)

解得 $k=2$ 或 $k=\frac{22}{19}$. ……(10 分)

18. **解析**　(Ⅰ)$\because$ $\sqrt{6S_n}$ 是 a_n 与 a_n+3 的等比中项,

$\therefore 6S_n=a_n(a_n+3)=a_n^2+3a_n$, ……(1 分)

当 $n=1$ 时,$6a_1=6S_1=a_1^2+3a_1$,解得 $a_1=3$; ……(2 分)

当 $n\geqslant 2$ 时,$6a_n=6(S_n-S_{n-1})=a_n^2+3a_n-(a_{n-1}^2+3a_{n-1})$,

$\therefore a_n^2-a_{n-1}^2=(a_n+a_{n-1})(a_n-a_{n-1})=3(a_n+a_{n-1})$.

$\because a_n>0$,$\therefore a_n-a_{n-1}=3$, ……(4 分)

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 3,公差为 3 的等差数列, ……(5 分)

$\therefore a_n=3n$. ……(6 分)

(Ⅱ)由(Ⅰ)知,$c_n=\frac{1}{a_na_{n+1}+a_n+a_{n+1}+1}=\frac{1}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}=\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)$,

……(8 分)

$\therefore T_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n+1}-\frac{1}{3n+4}\right)$

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{3n+4}\right)$ ……………………………………………………（10分）

$=\dfrac{n}{12n+16}$. ……………………………………………………（12分）

19. **解析**　（Ⅰ）由抛物线定义知，$|PF|=4+\dfrac{p}{2}$. ……………………………………（1分）

$\because P(4,y_0)$在抛物线 C 上，$\therefore y_0^2=8p$. ……………………………………（2分）

由题知，$|PM|=|PF|$，

$\therefore (4-7)^2+(y_0-0)^2=\left(4+\dfrac{p}{2}\right)^2$，……………………………………（3分）

即 $9+8p=\left(4+\dfrac{p}{2}\right)^2$，解得 $p=2$ 或 14（舍去），……………………………………（4分）

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$. ……………………………………（5分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$F(1,0)$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=ky+2$，

代入 $y^2=4x$ 整理得 $y^2-4ky-8=0$，

$\therefore \Delta=(-4k)^2-4\times(-8)=16k^2+32>0$，

$y_1+y_2=4k$，$y_1y_2=-8$. ……………………………………（7分）

$\because \overrightarrow{FA}=(x_1-1,y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(x_2-1,y_2)$，……………………………………（8分）

$\therefore \overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=(x_1-1)(x_2-1)+y_1y_2=(ky_1+1)(ky_2+1)+y_1y_2$

$=(k^2+1)y_1y_2+k(y_1+y_2)+1$

$=-8(k^2+1)+4k^2+1=-4k^2-7$，……………………………………（10分）

当 $k=0$ 时，$(\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB})_{\max}=-7$. ……………………………………（12分）

20. **解析**　（Ⅰ）由题知，侧面 ABB_1A_1 为平行四边形，

$\therefore G$ 为 AB_1，A_1B 的中点. ……………………………………（1分）

$\because E$，F 分别为 AB，A_1C_1 的中点，

$\therefore EG/\!/BB_1$，$FG/\!/BC_1$. ……………………………………（2分）

$\because BB_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，$BC_1\subset$ 平面 BB_1C_1C，$EG\not\subset$ 平面 BB_1C_1C，$FG\not\subset$ 平面 BB_1C_1C，

$\therefore EG/\!/$ 平面 BB_1C_1C，$FG/\!/$ 平面 BB_1C_1C，……………………………………（4分）

又 $EG\cap FG=G$，

$\therefore$ 平面 $EFG/\!/$ 平面 BB_1C_1C. ……………………………………（5分）

（Ⅱ）如图，连接 FB_1. $\because$ 侧面 AA_1C_1C 为矩形，$\therefore AA_1\perp A_1C_1$，

$\because$ 平面 $AA_1C_1C\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$，平面 $AA_1C_1C\cap$ 平面 $A_1B_1C_1=A_1C_1$，

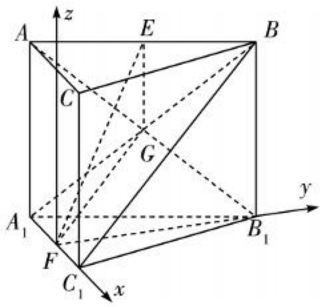
$\therefore AA_1\perp$ 平面 $A_1B_1C_1$.

$\because A_1B_1=B_1C_1=C_1A_1=2$，$\therefore B_1F\perp A_1C_1$，$FB_1=\sqrt{3}$. ……………………………………（7分）

以 F 为坐标原点，FC_1，FB_1 分别为 x 轴、y 轴，过 F 且与 AA_1 平行的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，

则 $A_1(-1,0,0)$，$C_1(1,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},3)$，$C(1,0,3)$，

$\therefore \overrightarrow{A_1C_1}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{C_1B}=(-1,\sqrt{3},3)$，$\overrightarrow{CB}=(-1,\sqrt{3},0)$. ……………………………………（8分）



设平面 BA_1C_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}=2x=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{C_1B}=-x+\sqrt{3}y+3z=0,\end{cases}$ 令 $y=3$，则 $\boldsymbol{m}=(0,3,-\sqrt{3})$. ………………（9 分）

设直线 BC 与平面 BA_1C_1 所成角为 θ，则

$\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CB}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\overrightarrow{CB}|}=\dfrac{|0\times(-1)+3\times\sqrt{3}+0\times(-\sqrt{3})|}{\sqrt{0^2+3^2+(-\sqrt{3})^2}\times\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2+0^2}}=\dfrac{3}{4}$， ………………（11 分）

∴ 直线 BC 与平面 BA_1C_1 所成角的正弦值为 $\dfrac{3}{4}$. ………………（12 分）

21. **解析**　（Ⅰ）如图，设 O 是线段 AB 的中点，连接 PO,DO,BD.

∵ 四边形 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=\dfrac{\pi}{3}$，$AB=2\sqrt{3}$，

∴ $\triangle ABD$ 为正三角形，$AB/\!/CD$，$AB=CD=2\sqrt{3}$，

∴ $DO\perp AB$，$OD=3$. ………………（1 分）

∵ $PD=3\sqrt{2}$，$PC=\sqrt{30}$，∴ $PC^2=PD^2+CD^2$，∴ $PD\perp CD$， ………………（2 分）

∴ $PD\perp AB$.

∵ $OD\cap PD=D$，∴ $AB\perp$ 平面 POD，∴ $AB\perp PO$， ………………（3 分）

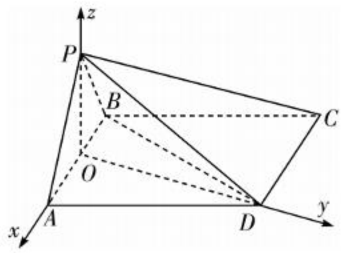
∵ $PA=2\sqrt{3}$，∴ $PO^2=PA^2-AO^2=(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2=9$，

∴ $PO^2+OD^2=PD^2$，∴ $PO\perp OD$. ………………（4 分）

∵ $OD\cap AB=O$，$OD\subset$ 平面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

∴ $PO\perp$ 平面 $ABCD$， ………………（5 分）

∵ $PO\subset$ 平面 PAB，∴ 平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$. ………………（6 分）



（Ⅱ）以 O 为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OP}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴正方向建立空间直角坐标系 $O-xyz$，

则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$D(0,3,0)$，$C(-2\sqrt{3},3,0)$，$P(0,0,3)$，

∴ $\overrightarrow{AD}=(-\sqrt{3},3,0)$，$\overrightarrow{DP}=(0,-3,3)$，$\overrightarrow{CD}=(2\sqrt{3},0,0)$. ………………（7 分）

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=-\sqrt{3}x_1+3y_1=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DP}=-3y_1+3z_1=0, \end{cases}$ 令 $y_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3},1,1)$. ……………………（8分）

设平面 PCD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=2\sqrt{3}x_2=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DP}=-3y_2+3z_2=0, \end{cases}$ 令 $y_2=1$，则 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$. ……………………（9分）

$\therefore \cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\sqrt{3}\times0+1\times1+1\times1}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2+1^2}\times\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$，……………………（11分）

$\therefore$ 平面 PAD 与平面 PCD 夹角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$. ……………………（12分）

22. **解析** （Ⅰ）设 F_2 是椭圆 C 的右焦点，$2c(c>0)$ 为椭圆 C 的焦距，连接 MF_2.

$\because$ N 是线段 MF_1 的中点，O 是线段 F_1F_2 的中点，

$\therefore |ON|=\dfrac{1}{2}|MF_2|,|F_1N|=\dfrac{1}{2}|MF_1|$. ……………………（1分）

由椭圆定义知，$2a=|MF_1|+|MF_2|=2|NF_1|+2|ON|=4$，

$\therefore a=2$. ……………………（2分）

由椭圆的几何性质知，$|F_1A_2|=a+c=3|F_1A_1|=3(a-c)$，即 $a=2c$，

$\therefore c=1$，……………………（3分）

$\therefore b^2=a^2-c^2=2^2-1^2=3$，……………………（4分）

$\therefore$ 椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………………（5分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$A_2(2,0)$，$F_1(-1,0)$.

设 $G(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$，

则$\dfrac{x_0^2}{4}+\dfrac{y_0^2}{3}=1$，$k_{GA_2}=\dfrac{y_0}{x_0-2}$. ……………………（6分）

$\because GA_2\perp F_1H$，$\therefore k_{F_1H}=-\dfrac{x_0-2}{y_0}$，……………………（7分）

$\therefore$ 直线 F_1H 的方程为 $y=\dfrac{2-x_0}{y_0}(x+1)$，……………………（8分）

令 $x=2$，得 $H\left(2,\dfrac{3(2-x_0)}{y_0}\right)$. ……………………（9分）

$\therefore k_{GH}=\dfrac{y_0-\dfrac{6-3x_0}{y_0}}{x_0-2}=\dfrac{y_0^2+3x_0-6}{y_0(x_0-2)}=\dfrac{3-\dfrac{3x_0^2}{4}+3x_0-6}{y_0(x_0-2)}=\dfrac{-3(x_0-2)^2}{4y_0(x_0-2)}=\dfrac{6-3x_0}{4y_0}$，……………………（10分）

$\therefore$ 直线 GH 的方程为 $y-\dfrac{6-3x_0}{y_0}=\dfrac{6-3x_0}{4y_0}(x-2)$，即 $y=\dfrac{6-3x_0}{4y_0}(x+2)$，……………………（11分）

$\therefore$ 直线 GH 过定点$(-2,0)$. ……………………（12分）