

根据表中的数据可得经验回归方程 $\hat{y} = -1.25x + 13.75$, 以下说法正确的是

- A. x, y 具有负相关关系, 相关系数 $r = -1.25$
 B. x 每增加一个单位, y 平均减少 13.75 个单位
 C. 第二个样本点对应的残差 $\hat{e}_2 = 0.25$
 D. 第三个样本点对应的残差 $\hat{e}_3 = -0.5$

6. 已知函数 $f(x) = \log_2 \frac{x}{2} \cdot \log_2 \frac{x}{8}$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$ (其中 $x_1 \neq x_2$), 则 $\frac{1}{x_1} + \frac{9}{x_2}$ 的最小值为

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 4

7. 已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的各棱长都为 2, $\angle A_1AD = \angle A_1AB = \angle BAD = 60^\circ$, E, F, G 分别是棱 AB, AD, CD 的中点, 则

- ~~A. $B_1G \parallel$ 平面 A_1EF~~
~~B. 平面 $A_1EF \perp$ 平面 $ABCD$~~
 C. 平面 $ABCD$ 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 间的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$
 D. 直线 AA_1 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 已知 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 满足 $f(\frac{\pi}{4}) = 1, f(\frac{5}{3}\pi) = 0$ 且 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6})$ 上单调, 则 ω 的最大值为

- A. $\frac{12}{7}$ B. $\frac{18}{17}$ C. $\frac{6}{17}$ D. $\frac{30}{17}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F , 斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 经过点 F 且与抛物线 C 交于 A, B 两点 (点 A 在第一象限) 且与抛物线的准线交于点 D , 若 $|AF| = 8$, 则以下结论正确的是

- A. $p = 4$ B. $\vec{DF} = \vec{FA}$ C. $|BD| = 2|BF|$ D. $|BF| = 4$

10. 已知 $f(x)$ ($x \in \mathbf{R}$) 为偶函数, 且 $f(x - \frac{3}{2}) = f(x + \frac{1}{2})$ 恒成立, 当 $x \in [2, 3]$ 时 $f(x) = x$, 则下列四个命题中, 正确的是

- A. $f(x)$ 的周期是 $2k$ ($k \neq 0, k \in \mathbf{Z}$) I. $f(x)$ 的图象关于点 $(1, 0)$ 对称
 C. 当 $x \in [-3, -2]$ 时, $f(x) = -x$ D. 当 $x \in [-2, 0]$ 时, $f(x) = 3 - |x + 1|$

11. 人民日报智慧媒体研究院在 2020 智慧媒体高峰论坛上发布重磅智能产品——人民日报创作大脑, 在 AI 算法的驱动下, 无论是图文编辑、视频编辑, 还是素材制作, 所有的优质内容创作都变得更加容易. 已知某数据库有包括视频甲和图片乙在内的视频 a 个、图片 b 张 ($a, b \in \mathbf{N}^*$, $a > b > 1$), 从中随机选出一个视频和一张图片, 记“视频甲和图片乙均入选”为事件 A , “视频甲入选”为事件 B , “图片乙入选”为事件 C , 则下列判断中正确的是

- A. $P(A) = P(B) + P(C)$ B. $P(A) = P(B) \cdot P(C)$
C. $P(\bar{A}) > P(\bar{B}) + P(\bar{C})$ D. $P(\bar{B}) < P(\bar{C})$

12. 已知四面体 $ABCD$ 中, $AB \perp$ 面 BCD , $BC \perp CD$, E, F 分别是棱 AC, AD 上的点, 且 $BE \perp AC$, $BF \perp AD$. 记四面体 $ABEF$ 、四棱锥 $B-ECDF$ 、四面体 $ABCD$ 的外接球体积分别是 V_1, V_2, V_3 , 则 $\frac{V_1 + V_2}{V_3}$ 的值不可能是

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{3}{4}$

第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 将函数 $f(x) = x^8$ 表示为 $f(x) = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + \dots + a_8(1+x)^8$, 其中 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_8$ 为实数, 则 $a_3 =$ _____.
14. 已知函数 $f(x) = e^{2x} - 2e^x + 2x$ 在点 $P(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程为 $l: y = g(x)$, 若对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $(x - x_0)(f(x) - g(x)) \geq 0$ 成立, 则 $x_0 =$ _____.
15. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 M, N 分别为 C 的渐近线和左支上的动点, 且 $|MN| + |NF_2|$ 的最小值恰为 C 的实轴长的 2 倍, 则 C 的离心率为 _____.
16. 已知 $-2 < a < 1$ 且 $x \geq 0$ 时, $5e^{8x} + 48 \geq 4(2x - a)^5$ 恒成立, 则 a 的最小值是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\cos B + \sin \frac{A+C}{2} = 0$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $a : c = 3 : 5$, 且 AC 边上的高为 $\frac{15\sqrt{3}}{14}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (本小题满分 12 分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1=2, S_{n+1}=2S_n+2(n \in \mathbf{N}^+)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

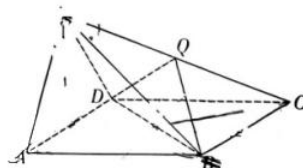
(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{(a_n+1)(a_{n+1}+1)}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是平行四边形, 侧面 PAD 是边长为 2 的正三角形, $AB=BD=\sqrt{7}, PB=3$.

(1) 求证: 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$;

(2) 设 Q 是棱 PC 上的点, 当 $PA \perp$ 平面 BDQ 时, 求二面角 $A-BD-Q$ 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, A, B 是它的左、右顶点, 过点 $D(1, 0)$ 的动直线 l (不与 x 轴重合) 与 E 相交于 M, N 两点, $\triangle MAB$ 的最大面积为 $2\sqrt{2}$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 设 $P(m, n)$ 是直线 AM 与直线 BN 的交点.

(i) 证明 m 为定值;

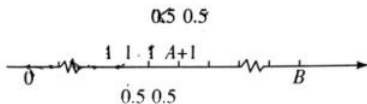
(ii) 试探究: 点 B 是否一定在以线段 MN 为直径的圆内? 证明你的结论.

21. (本小题满分 12 分)

马尔科夫链是概率统计中的一个重要模型,也是机器学习和人工智能的基石,在强化学习、自然语言处理、金融领域、天气预测等方面都有着极其广泛的应用.其数学定义为:假设我们的序列状态是 $\dots, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \dots$,那么 X_{t+1} 时刻的状态的条件概率仅依赖前一状态 X_t ,即 $P(X_{t+1} | \dots, X_{t-1}, X_t) = P(X_{t+1} | X_t)$.

现实生活中也存在着许多马尔科夫链,例如著名的赌徒模型.

假如一名赌徒进入赌场参与一个赌博游戏,每一局赌徒赌赢的概率为 50%,且每局赌赢可以赢得 1 元,每一局赌徒赌输的概率为 50%,且赌输就要输掉 1 元.赌徒会一直玩下去,直到遇到如下两种情况才会结束赌博游戏:一种是手中赌金为 0 元,即赌徒输光;一种是赌金达到预期的 B 元,赌徒停止赌博.记赌徒的本金为 A ($A \in \mathbf{N}^*$, $A < B$),赌博过程如下图的数轴所示.



当赌徒手中有 n 元 ($0 < n < B, n \in \mathbf{N}$) 时,最终输光的概率为 $P(n)$,请回答下列问题:

- (1) 请直接写出 $P(1)$ 与 $P(B)$ 的数值.
- (2) 证明 $\{P(n)\}$ 是一个等差数列,并写出公差 d .
- (3) 当 $A=100$ 时,分别计算 $B=200, B=1000$ 时, $P(A)$ 的数值,并结合实际,解释当 $B \rightarrow \infty$ 时, $P(A)$ 的统计含义.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \frac{a}{x}$ ($a \in \mathbf{R}$).

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的零点个数;
- (2) 若 $|f(x)| > a \ln x - a$ 恒成立,求 a 的取值范围.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

