2022年秋期高中三年级期终质量评估数学（理）

参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	A	B	B	D	A	D	D	A	B	C

二、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

13．150　　14．$\frac{1}{3}$　　15．20π　　16．$\left(-\infty,\frac{1}{e^2}\right]$

三、解答题（本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．【解析】

(1) 当$n=1$时，$S_1=a_1=\frac{(a_1-1)(a_1+2)}{2}$，解得：$a_1=2$或者$a_1=-1$，………2分

因为$a_n>0$，故$a_1=2$．……………………………………………………………3分

方法一：因为$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{n(a_n+2)}{2}$，所以$\frac{n(a_n+2)}{2}=\frac{(a_n-1)(a_n+2)}{2}$，

又$a_n>0$，即可得$a_n=n+1$．……………………………………………………6分

方法二：当$n=2$时，$S_2=2+a_2=\frac{(a_2-1)(a_2+2)}{2}$，易得：$a_2=3$．

因为数列$\{a_n\}$是等差数列，故$a_n=n+1$．………………………………………6分

(2) 由(1)知，$b_n=(n+1)\cdot(\frac{8}{9})^n$，故$b_{n+1}=(n+2)\cdot(\frac{8}{9})^{n+1}$．

$\because b_{n+1}-b_n=(\frac{8}{9})^n\times\frac{7-n}{9}$，……………………………………………………8分

当$n<7$时，$b_{n+1}>b_n$；

当$n=7$时，$b_{n+1}=b_n$；

当 $n>7$ 时，$b_{n+1}<b_n$；……………………………………………………………11 分

故数列 $\{b_n\}$ 的最大项为 b_7,b_8，即 $n=7$或8 ……………………………………………12 分

18. 【解析】

(1)记一轮踢球，甲进球为事件 A，乙进球为事件 B，A，B 相互独立，

由题意得：$P(A)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$，………………………2 分

甲的得分 X 的可能取值为-1,0,1，…………………………………………………………3 分

$P(X=-1)=P(\bar{A}B)=P(\bar{A})P(B)=\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$,

$P(X=0)=P(AB)+P(\bar{A}\bar{B})=P(A)P(B)+P(\bar{A})P(\bar{B})=\frac{2}{5}\times\frac{1}{3}+\left(1-\frac{2}{5}\right)\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{15}$

$P(X=1)=P(A\bar{B})=P(A)P(\bar{B})=\frac{2}{5}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{15}$,

所以 X 的分布列为：

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{15}$

……………………………………………………………6 分

所以 $E(X)=-1\times\frac{1}{5}+0\times\frac{8}{15}+1\times\frac{4}{15}=\frac{1}{15}$ ……………………………………………7 分

(2)根据题意，经过第 2 轮踢球累计得分后甲得分高于乙得分的情况有三种；

分别是：甲两轮中第 1 轮得 0 分，第 2 轮得 1 分；

或者甲第 1 轮得 1 分，第 2 轮得 0 分；

或者甲两轮各得 1 分，……………………………………………………………10 分

于是：$p_2=P(X=0)\cdot P(X=1)+P(X=1)\cdot\left[P(X=0)+P(X=1)\right]$

$=\frac{8}{15}\times\frac{4}{15}+\frac{4}{15}\times\left(\frac{8}{15}+\frac{4}{15}\right)=\frac{16}{45}$ ……………………………………………12 分

19. 【解析】

(1)证明：因为 $PB\perp$底面 $ABCD$，所以 $PB\perp BC$.

又底面 $ABCD$ 为直角梯形，且 $\angle ABC=\angle BAD=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $AB\perp BC$. …………2 分

因此 $BC\perp$平面 PAB. ……………………………………………………………………3 分

因为 $BC/\!/AD$，$BC\not\subset$平面PAD，

所以 $BC/\!/$平面PAD.

又由题平面 PAD 与平面 PBC 的交线为 l.

所以$l/\!/BC$，……………………………………………………………………………5 分

故$l\perp$平面PAB. ……………………………………………………………………6 分

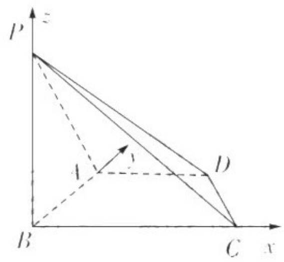
(2)以 B 为坐标原点，$\overrightarrow{BC}$ 的方向为 x 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $B-xyz$，

则 $B(0,0,0)$，$C(2,0,0)$，$A(0,1,0)$，$P(0,0,1)$，…………………………7 分

由(1)可设 $Q(a,0,1)$，则 $\overrightarrow{BQ}=(a,0,1)$．设 $n=(x,y,z)$ 是平面 QAB 的法向量，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BQ}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0\end{cases}$,即 $\begin{cases}ax+z=0\\ y=0\end{cases}$，可取 $n=(-1,0,a)$ ………………………………8 分

所以 $\cos\langle n,\overrightarrow{PD}\rangle=\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PD}|}=\dfrac{-1-a}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{1+a^2}}$.



设 PD 与平面 QAB 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{|1+a|}{\sqrt{1+a^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{1+\dfrac{2a}{1+a^2}}$；

因此:

当 $a>0$时，可得 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{1+\dfrac{2a}{1+a^2}}\le\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ (当且仅当 $a=1$ 时等号成立). ………10 分

又当 $a\le 0$时，易知不符合题意. ………………………………………………………11 分

所以 PD 与平面 QAB 所成角的正弦值的最大值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………12 分

20. 【解析】

(1) $f'(x)=\frac{1}{x}-2x+1=\frac{-2x^2+x+1}{x}=\frac{(-2x-1)(x-1)}{x}$ ……………………………2 分

故 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上是单调增加的，在 $(1,+\infty)$ 上是单调减少的. ……………………3 分

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=0$，即 $f(x)\le 0$ ……………………………………………………4 分

(2)当 $a=0$ 时，$f(x)=-x^2$，不存在零点. ……………………………………………5 分

当 $a\ne 0$ 时，由 $f(x)=0$ 得 $\frac{1}{a}=\frac{\ln x+x}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$ ……………………………7 分

设 $g(x)=\frac{\ln x+x}{x^2}$，则 $g'(x)=\frac{1-2\ln x-x}{x^3}$ ………………………………………8 分

令 $h(x)=1-2\ln x-x$，

易知 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减少的，且 $h(1)=0$.

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上是单调增加的，在 $(1,+\infty)$ 上是单调减少的. ……………………9 分

由于 $g(\frac{1}{e})=\frac{-1+\frac{1}{e}}{(\frac{1}{e})^2}<0$，$g(1)=1$，且当 $x>1$ 时，$g(x)>0$ …………………10 分

故若函数 $f(x)$ 有且只有一个零点，则只须 $\frac{1}{a}=1$ 或 $\frac{1}{a}<0$ ………………………11 分

即当 $a\in(-\infty,0)\cup\{1\}$ 时，函数 $f(x)$ 有且只有一个零点. …………………………12 分

21. 【解析】

(1)由题意知：$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，即 $a=2c$，

又由椭圆定义可得：$|PF_1|+|PA|=2a+(|PA|-|PF_2|)$

$\le 2a+|AF_2|=2a+\sqrt{(1-c)^2+1}=5$，…………………………………………2 分

又∵ $a^2=b^2+c^2$，且 $a\le\frac{5}{2}$，……………………………………………………3 分

故可得：$a=2,b=\sqrt{3},c=1$ ……………………………………………………………4 分

即椭圆C:的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$……………………………………………5 分

(2)延长F_1M交椭圆于点P，由$\overrightarrow{F_1M}=2\overrightarrow{F_2N}$，

根据椭圆的对称性可得$\overrightarrow{F_1M}=2\overrightarrow{PF_1}$． ……………………………………………6 分

设$M(x_1,y_1)$，$P(x_2,y_2)$，则$N(-x_2,-y_2)$．显然，$y_1>0$．

设直线PM的方程为$x=my-1$，

联立$\begin{cases}x=my-1\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$得，$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$，

$\therefore y_1+y_2=\dfrac{6m}{3m^2+4}$ ①

$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$ ②……………………………………………8 分

又$\because \overrightarrow{F_1M}=2\overrightarrow{PF_1}$，得$y_1=-2y_2$ ③

由①②③得，$m=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$． ……………………………………………9 分

得直线PM的方程为$x=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}y-1$，即$\sqrt{5}x-2y+\sqrt{5}=0$，

设F_2到直线PM的距离为d，

则由距离公式得：$d=\dfrac{\left|\sqrt{5}+\sqrt{5}\right|}{\sqrt{5+4}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$， ……………………………………………10 分

又由弦长公式得：$|PM|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(\dfrac{6m}{3m^2+4})^2-4(-\dfrac{9}{3m^2+4})}$

将$m=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$代入上式得$|PM|=\dfrac{27}{8}$，……………………………………………11分

设四边形F_1F_2NM的面积为S.

易知$S=\dfrac{1}{2}\cdot|PM|\cdot d=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{27}{8}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{3}=\dfrac{9\sqrt{5}}{8}$……………………………………12分

【选做题】

22.【解析】

（1）因为$\begin{cases}x=2\cos\varphi\\ y=\sin\varphi\end{cases}$，

所以曲线C的直角坐标方程为$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

因为$x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，

所以，曲线C的极坐标方程为：$\rho^2=\dfrac{4}{3\sin^2\theta+1}$……………………………5分

（2）由于$OA\perp OB$，故可设$A(\rho_1,\theta)$，$B\left(\rho_2,\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\rho_1{}^2=\dfrac{4}{3\sin^2\theta+1}$，$\rho_2{}^2=\dfrac{4}{3\cos^2\theta+1}$，

所以$\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}=\dfrac{1}{\rho_1^2}+\dfrac{1}{\rho_2^2}$

$=\dfrac{(3\cos^2\theta+1)+(3\sin^2\theta+1)}{4}=\dfrac{5}{4}$.

即$\dfrac{1}{|OA|^2}+\dfrac{1}{|OB|^2}$为定值$\dfrac{5}{4}$……………………………………………………10分

23.【解析】

(1)由题知：$|x+a|-|x-2b|\le|(x+a)-(x-2b)|=|a+2b|=a+2b$，

因为存在 $x_0\in R$，使得 $|x_0+a|-|x_0-2b|\ge 4$，所以只需 $a+2b\ge 4$，

即 $a+2b$ 的取值范围是 $[4,+\infty)$．……………………………………………………5 分

（2）方法一：

由（1）知 $a+2b\ge 4$，因为 $a,b\in R_+$，不妨设 $t=a^2+b^2$，

当 $b\ge 2$ 时，$t=a^2+b^2>4$，

当 $0<b<2$ 时，有 $t-b^2=a^2\ge(4-2b)^2$，

整理得，$t\ge 5b^2-16b+16=5(b-\frac{8}{5})^2+\frac{16}{5}$，此时 t 的最小值为 $\frac{16}{5}$；

综上：a^2+b^2 的最小值为 $\frac{16}{5}$……………………………………………………10 分

方法二：

令 $t^2=a^2+b^2$，不妨设 $a=t\cos\theta, b=t\sin\theta$，

因为 $a+2b\ge 4$，所以 $|t|\ge\frac{4}{|\cos\theta+2\sin\theta|}\ge\frac{4}{\sqrt{5}}$，所以：$t^2\ge\frac{16}{5}$，

即 a^2+b^2 的最小值为 $\frac{16}{5}$……………………………………………………10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。