无锡市普通高中2022届高三期终调研考试卷

数　学　　2022.01

一、单选题：本大题共8小题，每小题5分，共计40分.每小题给出的四个选项中，只有一项是符合要求的.

1. 集合 $A=\{x|-3\le x<4\}$，$B=\{y|y=2x^2+1,x\in R\}$，则 $C_RA\cap B=$（　　）

A. $[1,4)$　　B. $[4,+\infty)$　　C. $[-3,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3)\cup[4,+\infty)$

【答案】B

【解析】$C_RA=(-\infty,-3)\cup[4,+\infty)$，$B=[1,+\infty)$，则 $C_RA\cap B=[4,+\infty)$，故选 B.

2. 已知 $\dfrac{a+3i}{1+i}$（i 为虚数单位，$a\in R$）为纯虚数，则 $a=$（　　）

A. -1　　B. 1　　C. -3　　D. 3

【答案】C

【解析】$\dfrac{a+3i}{1+i}=\dfrac{(a+3i)(1-i)}{2}=\dfrac{a+3+(3-a)i}{2}$，则 $a+3=0,a=-3$，故选 C.

3. 某年的足球联赛上，甲队每场比赛平均失球数是1.5个，全年比赛失球个数的标准差为 $1:4$；乙队每场比赛平均失球数是2.3个，全年比赛失球个数的标准差为0.3，下列说法正确的是（　　）

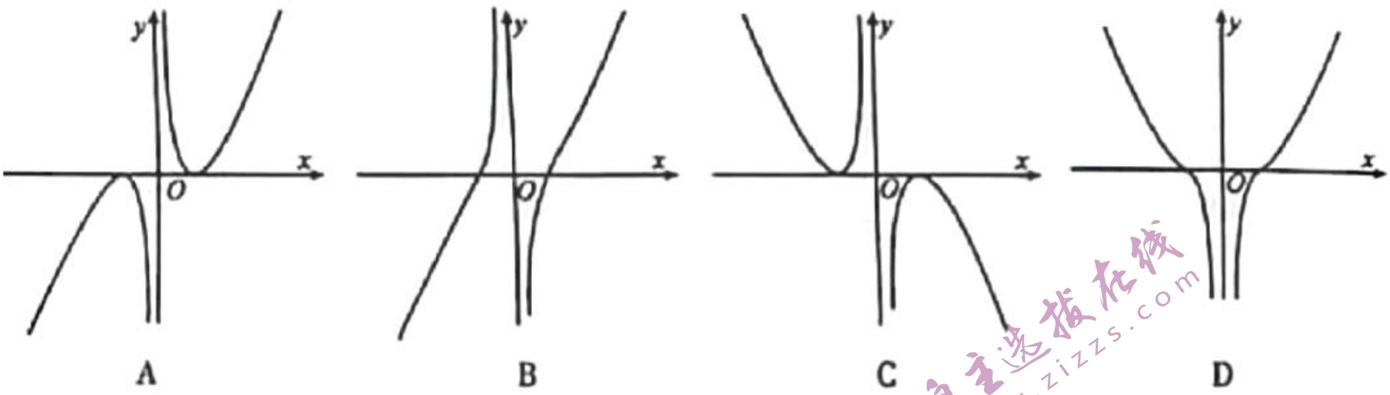
A. 甲乙两队相比，乙队很少失球　　B.甲队比乙队技术水平更稳定

C.平均来说，甲队比乙队防守技术好　　D.乙队有时表现很差，有时表现又非常好

【答案】C

【解析】由于甲的平均失球数比乙低，则平均来说甲比乙的防守技术好，故选 C.

4. 已知函数 $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\ln|x|$，则函数 $y=f(x)$ 的图像可能是（　　）



【答案】A

【解析】易知函数 $f(x)$ 为奇函数,当 $x>1$ 时,$x-\frac{1}{x}>0,\ln|x|>0,f(x)>0$,

当 $0<x<1$ 时,$x-\frac{1}{x}<0,\ln|x|<0,f(x)>0$,故选 A.

5. 已知点 P 在圆 $x^2+y^2=1$ 上,点 A 的坐标为 $(-2,-1)$,O 为坐标原点,则 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}$ 的最小值等于（　　）

A. 3　　B. $5-\sqrt{5}$　　C. 4　　D. $5+\sqrt{5}$

【答案】B

【解析】设 $P(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=(2,1)\cdot(\cos\alpha+2,\sin\alpha+1)=\sqrt{5}\sin(\alpha+\varphi)+5\geq-\sqrt{5}+5$，故选 B.

6. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 是正方形 $ABCD$ 的中心，则直线 B_1M 与平面 A_1C_1B 所成角的正弦值为（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【答案】D

【解析】设正方体的边长为 2，由于 $B_1D\perp$ 平面 A_1C_1B，则 B_1M 与平面 A_1C_1B 所成角

$\alpha=\frac{\pi}{2}-\angle MB_1D$,则 $\sin\alpha=\cos\angle MB_1D=\frac{B_1D^2+B_1M^2-DM^2}{2\cdot B_1D\cdot B_1M}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故选 D.

7. 已知F_1，F_2是双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点，$A_1$，$A_2$是双曲线$C$的左、右顶点，点$P$是双曲线$C$左支上的一点，以$A_1A_2$为直径的圆与$PF_2$相切于$M$点，若$M$恰为$PF_2$的中点，则取双曲线$C$的渐近线方程为（　　）

A. $y=\pm\sqrt{2}x$　　B. $y=\pm x$　　C. $y=\pm\sqrt{3}x$　　D. $y=\pm 2x$

【答案】D

【解析】易知$PF_1\perp PF_2,PF_1=2OM=2a,PF_2=4a$，则$4a^2+16a^2=4c^2,c^2=5a^2$则$b^2=4a^2$，渐近线为$y=\pm 2x$，故选 D.

8. 在ΔABC中，角A，B，C所对应的边分别为a，b，c，设ΔABC的面积为S，则$\frac{S}{a^2+4bc}$的最大值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{2}}{16}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{12}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{16}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{18}$

【答案】A

【解析】因为$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,S=\frac{1}{2}bc\sin A$，所以$\frac{S}{a^2+4bc}=\frac{1}{2}\frac{bc\sin A}{b^2+c^2-2bc\cos A+4bc}$，

所以$\frac{S}{a^2+4bc}\leqslant\frac{1}{2}\cdot\frac{bc\sin A}{2bc-2bc\cos A+4bc}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin A}{3-\cos A}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}+2\sin^2\frac{A}{2}}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{16}$，

当且仅当$b=c$，且$\cos A=\frac{1}{3}$时，上述等号成立.

二、多选题：本大题共4小题，每小题5分，共计20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 已知$e^b<e^a<1$，则下列结论正确的是（　　）

A. $a^2<b^2$　　B. $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$　　C. $ab>b^2$　　D. $\lg a^2<\lg(ab)$

【答案】ABD

【解析】因为$e^b<e^a<1$，所以$b<a<0$，所以$b^2>a^2$，即 A 正确；

因为$b<a<0$，所以$\frac{b}{a}>1>\frac{a}{b}>0$，所以$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$，即 B 正确；

因为$b<a<0$，所以$0<a^2<ab$，所以$\lg a^2<\lg ab$，即 D 正确.

10. 将一枚质地均匀地硬币先后抛掷两次，下列说法正确的有（　　）

A.至少一次正面朝上的概率是$\frac{3}{4}$

B.恰有一次正面朝上的概率与恰有两次正面朝上的概率一样

C.一次正面朝上，一次反面朝上的概率是$\frac{1}{4}$

D.在第一次正面朝上的条件下，第二次正面朝上的概率是$\frac{1}{2}$

【答案】AD

【解析】对于 A，其概率为$P=1-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$，即 A 正确；

对于 B，恰有一次正面朝上得概率$P_1=C_2^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，

恰有两次正面朝上得概率$P_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，即 B 错误；

由 B 可知，一次正面一次反面的概率为$\frac{1}{2}$，即 C 错误；

因为第一次抛硬币和第二次抛硬币为独立事件，所以第一次的结果不影响第二次，

所以第二次朝上得概率为$\frac{1}{2}$，即 D 正确.

11. 高斯被认为是历史上最重要的数学家之一，并享有“数学”王子之称.有这样一个函数就是以他名字命名的：设$x\in R$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$f(x)=[x]$称为高斯函数，又称为取整函数.如：$f(2.3)=2$，$f(-3.3)=-4$，则下列结论正确的是（　　）

A.函数$f(x)$是R上的单调递增函数

B.函数$g(x)=f(x)-\frac{2}{3}x$有2个零点

C.$f(x)$是R上的奇函数

D.对于任意实数a，b都有$f(a)+f(b)\le f(a+b)$

【答案】BD

【解析】对于 A，当 $x\in[0,1)$ 时，$f(x)=0$，不单调递增，即 A 错误；

对于 B，当 $x\in[n,n+1)(n\in\mathbf{Z})$ 时，$g(x)=n-\frac{2}{3}x$ 单调递减，

且 $g(n)=\frac{1}{3}n, g(n+1)=\frac{n-2}{3}$，若存在零点，则 $\frac{1}{3}n\geqslant 0>\frac{n-2}{3}$，则 $n=0,1$，

所以 $g(x)$ 恰有两个零点，即 B 正确；（此选项也可作图求解）

对于 C，因为 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0, f\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$，所以 $f(x)$ 不是奇函数，即 C 错误；

设 $a=m+a_1, b=n+b_1\left(m,n\in\mathbf{Z}, a_1,b_1\in[0,1)\right)$，则 $f(a)+f(b)=m+n$，

且 $f(a+b)=f(m+n+a_1+b_1)=m+n+f(a_1+b_1)\geqslant m+n$，即 D 正确.

12. 已知平面直角坐标系中两点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，用以下方式度量 A，B 两点距离：$d(A,B)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$，则下列说法正确的是（　　）

A.在平面直角坐标系中，$A(-3,0)$，$N(2,0)$，满足 $d(A,N)=d(A,C)+d(N,C)$ 的点 C 的横坐标的范围为 $[-3,2]$

B.在平面直角坐标系中，任意取三点 A，B，C，$d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(B,C)$ 恒成立

C.在平面直角坐标系中，点 O 是坐标原点，则满足 $d(O,P)=1$ 的点 $P(x,y)$ 所形成的图形是圆

D.在平面直角坐标系中，点 M 在 $y^2=4x$ 上，$N(2,0)$，则满足 $d(M,N)=3$ 的点 M 共有4个

【答案】ABD

【解析】对于 A，易知 $d(A,N)=3+2=5$，设 $C(x,y)$，则 $d(A,C)+d(N,C)=|x+3|+|x-2|+2|y|$

所以 $d(A,C)+d(N,C)\geqslant 5+2|y|\geqslant 5$，仅当 $x\in[-3,2], y=0$ 时去等，即 A 正确；

对于 B，因为 $|x_C-x_B|+|x_C-y_A|\geqslant|x_B-x_A|, |y_C-y_B|+|y_C-y_A|\geqslant|y_B-y_A|$，

所以 $d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(B,C)$，即 B 正确；

对于 C，设 $P(x,y)$，则 $d(O,P)=|x|+|y|=1$，作图可知，其轨迹为正方形，即 C 错误；

对于 D，设 $M\left(m^2,2m\right)$，则 $d\left(M,N\right)=\left|m^2-2\right|+\left|2m\right|=3$，则 $\left|m^2-2\right|=3-\left|2m\right|$，

作图可知，曲线 $y=\left|x^2-2\right|$ 与曲线 $y=3-\left|2x\right|$ 共有四个公共点，即 D 正确.

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共计20分.

13. 若 $\left(x+\dfrac{a}{\sqrt[3]{x}}\right)^6$ 的展开式中 x^2 的系数为160，则实数 a 的值为________.

【答案】2

【解析】由题意可知，$\mathrm{C}_6^3\cdot a^3=160$，解得 $a=2$.

14.已知 ΔABC 是边长为1的等边三角形，D 在边 BC 上，且 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，$E$ 为 AD 的中电，则

$\left|\overrightarrow{BE}\right|=$________.

【答案】$\dfrac{\sqrt{13}}{6}$

【解析】由题意可知，$\left|\overrightarrow{BE}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD}\right|=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{BA}\right|^2+\left|\overrightarrow{BD}\right|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}}=\dfrac{\sqrt{13}}{6}$.

15.设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10}>S_{11}>S_9$，则满足 $S_n\cdot S_{n+1}<0$ 的正整数 n 的值

为________.

【答案】20

【解析】因为 $S_{10}>S_{11}>S_9$，所以 $a_{11}<0$，且 $a_{10}+a_{11}>0$，所以 $S_{21}<0,S_{20}>0$，

即 $S_n\cdot S_{n+1}<0$ 的解为 $n=20$.

16.正四面体 $ABCD$ 的棱长为12，在平面 BCD 内有一动点 P，且满足 $AP=6\sqrt{3}$，则 P 点的轨

迹是________；设直线 AP 与直线 BC 所成的角为 θ，则 $\cos\theta$ 的取值范围为________.

【答案】圆；$\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$

【解析】易知该正四面体的侧面的高 $h_1=6\sqrt{3}$，该正四面体的高 $h=4\sqrt{6}$，所以点 P 的轨迹为

圆；设平面 BCD 的中心为 H，设 $\angle PAH=\alpha$，则 $\cos\alpha=\dfrac{4\sqrt{6}}{6\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$，

因为 $AH\perp BC$，所以 $\theta\in\left[\dfrac{\pi}{2}-\alpha,\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right]$，所以 $\cos\theta\in\left[0,\dfrac{1}{3}\right]$.

四、解答题：本大题共 6 小题，共计 70 分.解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2,a_2=3$，其前 n 项和 S_n 满足 $S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+1(n\ge 2，n\in N^*)$.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

（2）若 $b_n=\log_2\left(\dfrac{a_n\cdot 2^n}{n}\right)$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

【解析】（1）因为 $S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+1(n\ge 2)$，

所以 $(S_{n+1}-S_n)-(S_n-S_{n-1})=a_{n+1}-a_n=1(n\ge 2)$（*），

又 $a_2-a_1=3-2=1$ 亦满足（*）式，故 $a_n=n+1$.

（2）由（1）可知 $b_n=\log_2(\dfrac{a_n\cdot 2^n}{n})=\log_2[\dfrac{(n+1)\cdot 2^n}{n}]=\log_2(n+1)-\log_2 n+n$

所以 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\log_2(n+1)+\dfrac{n^2+n}{2}$.

18.（本小题满分 12 分）

$\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对应的边分别为 a,b,c，已知 $a=\sqrt{3},\tan A=3$，________.

请在① $c\sin A=3\cos C$；② $(\sin A-\sin B)^2=\sin^2 C-\sin A\cdot\sin B$ 这两个条件中任选一个，补充在上面的横线中并加以解答（注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.）

（1）求角 C；

（2）求 $\triangle ABC$ 的面积.

【解析】（1）选①，由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$ 得，$c\sin A=a\sin C=\sqrt{3}\sin C$，

又 $c\sin A=3\cos C$，所以 $\tan C=\sqrt{3}$，故在 ΔABC 中，$C=\dfrac{\pi}{3}$；

选②，因为$(\sin A-\sin B)^2=\sin^2 C-\sin A\cdot\sin B$，由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$得，

$(a-b)^2=c^2-ab$,，由余弦定理$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$得$\cos C=\dfrac{1}{2}$，

故在ΔABC中，$C=\dfrac{\pi}{3}$；

（2）因为$\tan A=3>0$, 则在ΔABC中，$\sin A=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$；由正弦定理$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$得$c=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$，

又$\sin B=\sin(\pi-A-B)=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2\sqrt{10}}$，

$\therefore S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{3+3\sqrt{3}}{8}$.

19.（本小题满分 12 分）

近日，中华人民共和国应急管理部公布了《高层民用建筑消防安全规定》.其中提到：在公共门厅等地停放电动车或充电，拒不改正的个人，最高可处以 100 元罚款为了研究知晓规定是否与年龄有关，某市随机抽取 125 名市民进行抽样调查，得到如下 2×2 列联表：

	知晓	不知晓	总计
年龄≤60	16	34	50
年龄>60	9	66	75
总计	25	100	125

参考公式：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$.

$P(K^2>k_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

（1）根据以上统计数据，是否有99%的把握认为知晓规定与年龄有关?

（2）将上述调查所得的频率视为概率，现在从本地所有市民中，采用随机抽样的方法抽取4位市民，记被抽取的4位市民中知晓规定的人数为X，求X的分布列及数学期望.

【解析】(1) $K^2=\dfrac{125\times(16\times66-34\times9)^2}{50\times75\times25\times100}=7.5>6.635$，

而 $P(K^2>6.635)=0.010$，故有 99% 的把握认为知晓规定与年龄有关.

(2)易知 X 服从二项分布 $X\sim B\left(4,\dfrac{1}{5}\right)$，则 $P(X=i)=C_4^i\left(\dfrac{1}{5}\right)^i\left(\dfrac{4}{5}\right)^{4-i}$，

则 X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\dfrac{256}{625}$	$\dfrac{256}{625}$	$\dfrac{96}{625}$	$\dfrac{16}{625}$	$\dfrac{1}{625}$

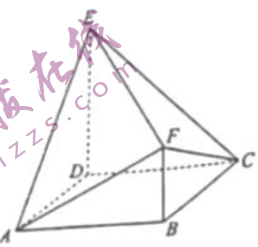
X 的数学期望为 $E(X)=4\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$.

20.（本小题满分 12 分）

如图，多面体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=60^\circ$，$ED\perp$ 平面 $ABCD$，$FB\perp$ 平面 $ABCD$，$DE=AD=2BF=2$.

（1）求证：$CF//$ 平面 ADE；

（2）求二面角 $A-EF-C$ 的正弦值.



【解析】(1) $\because ED\perp$ 平面$ABCD$，$FB\perp$ 平面$ABCD$，$\therefore ED\parallel BF$，

又 $\because BF\not\subset$ 平面ADE，$DE\subset$ 平面ADF，$\therefore BF\parallel$ 平面ADE，$\because ABCD$是菱形，$\therefore BC\parallel AD$，

又 $\because BC\not\subset$ 平面ADE，$AD\subset$ 平面ADF，$\therefore BC\parallel$ 平面ADE，又 $\because BC,BF\subset$ 平面BCF，$BC\cap BF=B$，

$\therefore$ 平面$BCF\parallel$ 平面ADE，$\because CF\subset$ 平面BCF，$\therefore CF\parallel$ 平面ADE.

(2)设 AC,BD 的交点为 O，以 O 为坐标原点，$\overline{OA},\overline{OB},\overline{DE}$ 为 x,y,z 轴的正方向建立平面直角坐标系，则 $A(\sqrt{3},0,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$E(0,-1,2)$，$F(0,1,1)$，设平面 AEF 的法向量为 $\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$，

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{EA}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x_1+y_1-2z_1=0\\ 2y_1-z_1=0\end{cases}$，令 $y_1=1$，则 $\vec{n}=(\sqrt{3},1,2)$，

设平面 CEF 的法向量为 $\vec{m}=(x_2,y_2,z_2)$，$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{EC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{3}x_2+y_2-2z_2=0\\ 2y_2-z_2=0\end{cases}$，

令 $y_2=1$,则 $\vec{m}=(-\sqrt{3},1,2)$，设二面角 $A-EF-C$ 为 θ，

则 $|\cos\theta|=\left|\cos\left\langle\vec{n},\vec{m}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{-3+1+4}{2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}}\right|=\dfrac{1}{4}$，则.$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

21.(本小题满分 12 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $\dfrac{1}{2}$,点 $A(-1,\ \dfrac{3}{2})$ 在椭圆 C 上，点 P 是 y 轴正半轴上的一点，过椭圆 C 的右焦点 F 和点 P 的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点.

（1）求椭圆 C 的标准方程；

（2）求 $\dfrac{|PM|+|PN|}{|PF|}$ 的取值范围.

【解析】(1) 由题意可知，$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，

因为 $A\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$ 在椭圆 C 上，所以 $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1$，

又 $a^2=b^2+c^2$，解得 $a=2,b=\sqrt{3},c=1$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；

(2) 设 $l:y=k(x-1),k<0$，设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

得 $\dfrac{|PM|+|PN|}{|PF|}=\dfrac{|x_1|+|x_2|}{x_F}=|x_1|+|x_2|$，

联立 $\begin{cases}3x^2+4y^2=12\\y=k(x-1)\end{cases}$，整理得 $(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$，

显然 $\Delta=144(k^2+1)>0$，

$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}>0,x_1x_2=\dfrac{4k^2-12}{3+4k^2}$，

当 $k\leqslant-\sqrt{3}$ 时，$x_1x_2\geqslant0$，此时 $|x_1|+|x_2|=x_1+x_2$，

得 $\dfrac{|PM|+|PN|}{|PF|}=x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}=\dfrac{8}{\dfrac{3}{k^2}+4}\in\left[\dfrac{8}{5},2\right)$；

当 $-\sqrt{3}<k<0$ 时，$x_1x_2<0$，此时 $|x_1|+|x_2|=|x_1-x_2|$，

得 $\dfrac{|PM|+|PN|}{|PF|}=|x_1-x_2|=\dfrac{12\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2}=\dfrac{12}{4\sqrt{k^2+1}-\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}}\in\left(\dfrac{8}{5},4\right)$,;

综上所述 $\dfrac{|PM|+|PN|}{|PF|}\in\left[\dfrac{8}{5},4\right)$.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$（$e$ 为自然对数的底数）.

（1）若不等式 $f(x)=\dfrac{e-1}{e+1}$ 恒成立，求实数 x 的取值范围；

（2）若不等式 $f(x)<ax+\dfrac{1}{3}-a\ln 2$ 在 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 上恒成立，求实数 a 的取值范围.

【解析】（1）由题意可知，$\dfrac{e^x-1}{e^x+1}>\dfrac{e-1}{e+1}$，整理得 $e^x>e$，解得 $x\in(1,+\infty)$；

注：在本小题中，量词使用不当，应改为"若 $f(x)>\dfrac{e-1}{e+1}$，求实数 x 的取值范围".

（2）设 $\dfrac{e^x}{2}=t\in(1,+\infty)$，则原不等式可化为 $\dfrac{2t-1}{2t+1}<a\ln t+\dfrac{1}{3}$，整理得 $\dfrac{2}{2t+1}+a\ln t-\dfrac{2}{3}>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，设 $g(t)=\dfrac{2}{2t+1}+a\ln t-\dfrac{2}{3}$，则 $g'(t)=\dfrac{a\left(4t+\dfrac{4}{t}+1\right)-4}{(2t+1)^2}$，

① 当 $a\leq 0$ 时，$g'(t)<0$ 恒成立，所以 $g(t)$ 单调递减，所以 $g(t)<g(1)=0$，不符题意；

② 当 $a>0$ 时，设 $h(t)=a\left(4t+\dfrac{4}{t}+1\right)-4$，则 $h'(t)=4a-\dfrac{4a}{t^2}>0$，所以 $h(t)$ 单调递增，

（i）若 $h(1)=9a-4\geq 0$，即 $a\geq\dfrac{4}{9}$ 时，$h(t)>0$ 恒成立，即 $g'(t)>0$ 恒成立，

所以 $g(t)$ 单调递增，所以 $g(t)>g(1)=0$，符合题意；

（ii）若 $h(1)=9a-4<0$，即 $a\in\left(0,\dfrac{4}{9}\right)$ 时，$h\left(\dfrac{1}{a}\right)=4a^2+a>0$，

所以存在 $t_0\in\left(1,\dfrac{1}{a}\right)$，使得 $h(t_0)=0$，则当 $t\in(1,t_0)$ 时，$h(t)<0$，即 $g'(t)<0$，

所以 $g(t)$ 在 $(1,t_0)$ 上单调递减，所以 $g(t_0)<g(1)=0$，不符题意；

综上，a 的取值范围为 $\left[\dfrac{4}{9},+\infty\right)$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。