(县)市________ 学校________ 年________ 班________ 考号________ 姓名________

密 封 线 内 不 要 答 题

延边州2023年高三教学质量检测

数学

本试卷共6页。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

注意事项：

1. **答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区。**
2. **选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚。**
3. **请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。**
4. **作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。**
5. **保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱。不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。**

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x|ax^2-3x+2=0\}$ 的元素只有一个，则实数 a 的值为

A. $\frac{9}{8}$　　B. 0　　C. $\frac{9}{8}$或0　　D. 无解

2. 已知复数 z 满足 $(\mathrm{i}-1)z=2$，给出下列四个命题其中正确的是

A. $|z|=2$　　B. z 的虚部为 -1　　C. $\bar{z}=1+\mathrm{i}$　　D. $z^2=-2\mathrm{i}$

3. 已知平面向量 $\vec{a}=(-1,1)$，$\vec{b}=(3,1)$ 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影向量为

A. $(1,0)$　　B. $\left(-\frac{3}{5},-\frac{1}{5}\right)$　　C. $\left(1,\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10},-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$

4. 某市在文明城市建设中，鼓励市民“读书好，好读书，读好书”.在各阅览室设立茶座，让人们在休闲中阅读有用有益图书．某阅览室为了提高阅读率，对于周末前来阅读的前三名阅读者各赠送一本图书，阅读者从四种不同的书籍中随意挑选一本，则他们有且仅有2名阅读者挑选同一种书的概率为

A. $\frac{3}{8}$　　B. $\frac{5}{9}$　　C. $\frac{3}{4}$　　D. $\frac{9}{16}$

5. 放射性核素锶89的质量 M 会按某个衰减率衰减，设其初始质量为 M_0，质量 M 与时间 t（单位：天）的函数关系为 $M=M_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{50}}$，若锶89的质量从 M_0 衰减至 $\frac{1}{2}M_0$，$\frac{1}{3}M_0$，$\frac{1}{12}M_0$ 所经过的时间分别为 t_1，t_2，t_3，则

A. $t_3=t_1+t_2$　　B. $t_2=2t_1+t_3$　　C. $t_3=2t_1+t_2$　　D. $t_3=2t_1-t_2$

6. 经过 $P(2,3)$ 向圆 $x^2+y^2=4$ 作切线，切线方程为

A. $13x-12y+10=0$　　B. $5x-12y+26=0$

C. $13x-12y+10=0$ 或 $x=2$　　D. $5x-12y+26=0$ 或 $x=2$

7. 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长是4，侧棱长是6，M，N 分别为 CC_1，AB 的中点，若 P 是侧面 BCC_1B_1 上一点，且 PN // 平面 AB_1M，则线段 PN 的最小值为

A. $\frac{\sqrt{39}}{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{26}}{5}$　　C. $\frac{2\sqrt{39}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{26}}{2}$

8. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6)=f(x)$，$y=f(x+3)$ 为偶函数，若 $f(x)$ 在 $(0,3)$ 内单调递增.记 $a=f(2021)$，$b=f(\mathrm{e}^{-1})$，$c=f(\ln 2)$，则 a，b，c 的大小关系为

A. $b<c<a$　　B. $c<b<a$　　C. $a<c<b$　　D. $a<b<c$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多个选项是符合题目要求的，全部选对得5分，部分选对得2分，有选错的得0分。

9. 下列化简正确的是

A. $\cos82°\sin52°+\sin82°\cos128°=-\frac{1}{2}$　　B. $\sin15°\sin30°\sin75°=\frac{1}{8}$

C. $\cos^2 15°-\sin^2 15°=\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\tan48°+\tan72°}{1-\tan48°\tan72°}=\sqrt{3}$

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为R，且 $f'(x)>1$，$f(3)=4$，则下列选项正确的是

A. $f(x)$ 为增函数　　B. $g(x)=f(x)-x$ 为增函数

C. $f(2x-1)>4$ 的解集为 $(-\infty,2)$　　D. $f(2x-1)>2x$ 的解集为 $(2,+\infty)$

11. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，过点 F 的直线 l 交抛物线于 A、B 两点，以线段 AB 为直径的圆交 y 轴于 M、N 两点，设线段 AB 的中点为 P，则

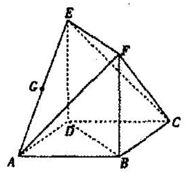
A. 若 $|AF|\cdot|BF|=4p^2$，则直线 AB 的斜率为 $\sqrt{3}$

B. $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-\dfrac{3p^2}{4}$

C. 若抛物线上存在一点 $E(2,t)$ 到焦点 F 的距离等于3，则抛物线的方程为 $y^2=8x$

D. 若点 F 到抛物线准线的距离为2，则 $\sin\angle PMN$ 的最小值为 $\dfrac{1}{2}$

12. 如图，矩形 $BDEF$ 所在平面与正方形 $ABCD$ 所在平面互相垂直，$AD=DE=4$，G 为线段 AE 上的动点，则



A. 若 G 为线段 AE 的中点，则 $GB\,//$ 平面 CEF　　B. $AE\perp CF$

C. BG^2+CG^2 的最小值为48　　D. 点 B 到平面 CEF 的距离为 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 在 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^7$ 的展开式中，含 $\dfrac{1}{x}$ 的项的系数是________.

14. 设 $a>0$，$b>1$，若 $a+b=2$，则 $\dfrac{9}{a}+\dfrac{1}{b-1}$ 取最小值时 a 的值为________.

15. 若函数 $f(x)=x(x-c)^2$ 在 $x=3$ 处有极小值，则 c 的值为________.

16. 已知坐标平面 xOy 中，点 F_1，F_2 分别为双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$（$a>0$）的左、右焦点，点 M 在双曲线 C 的左支上，MF_2 与双曲线 C 的一条渐近线交于点 D，且 D 为 MF_2 的中点，点 I 为 $\triangle OMF_2$ 的外心，若 O、I、D 三点共线，则双曲线 C 的离心率为______.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17.（10分）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $c=2b\cos B$，$C=\dfrac{2\pi}{3}$.

(1) 求 B；

(2) 在下面两个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，并求 BC 边上的中线的长度.

①$\triangle ABC$ 的周长为 $4+2\sqrt{3}$；②面积为 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$.

18.（12分）

已知等差数列 $\{a_n\}$ 中，公差 $d>0$，$S_{11}=77$，且 a_2，a_6-1，a_{11} 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 T_n 为数列 $\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和，且存在 $n\in N^*$，使得 $T_n-\lambda a_{n+1}\geq 0$ 成立，求实数 λ 的取值范围.

19.（12分）

如图1，在 $\triangle ABC$ 中，D，E 分别为 AB，AC 的中点，O 为 DE 的中点，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$.将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置，使得平面 $A_1DE\perp$ 平面 $BCED$，如图2.

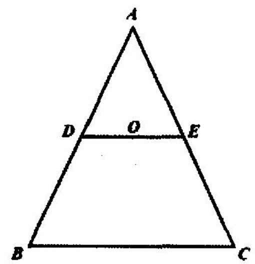


图1

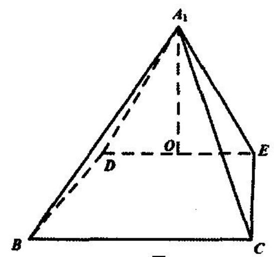


图2

(1) 求证：$A_1O\perp BD$.

(2) 求直线 A_1C 和平面 A_1BD 所成角的正弦值.

(3) 线段 A_1C 上是否存在点 F，使得直线 DF 和直线 BC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{35}}{7}$？若存在，求出 $\frac{A_1F}{A_1C}$ 的值；若不存在，说明理由.

20.（12分）

我国为全面建设社会主义现代化国家，制定了从2021年到2025年的“十四五”规划．某企业为响应国家号召，汇聚科研力量，加强科技创新，准备增加研发资金.该企业为了了解研发资金的投入额 x(单位：百万元)对年收入的附加额 y(单位：百万元)的影响，对往年研发资金投入额 x_i 和年收入的附加额 y_i 进行研究，得到相关数据如下：

投入额 x_i	2	3	4	5	6	8	9	11
年收入的附加额 y_i	3.6	4.1	4.8	5.4	6.2	7.5	7.9	9.1

(1) 求年收入的附加额 y 与投入额 x 的经验回归方程；

(2) 若年收入的附加额与投入额的比值大于1，则称对应的投入额为“优秀投资额”，现从上面8个投入额中任意取3个，用 X 表示这3个投入额为“优秀投资额”的个数，求 X 的分布列及数学期望.

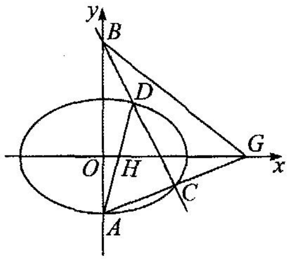
【参考数据】$\sum_{i=1}^{8}x_iy_i=334.1$，$\sum_{i=1}^{8}y_i=48.6$，$\sum_{i=1}^{8}x_i^2=356$.

【附】在经验回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中，$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

21.（12分）

已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左右焦点分别为 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$，过 F_1 且斜率为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$ 的直线与椭圆的一个交点在 x 轴上的射影恰好为 F_2.



(1) 求椭圆 E 的方程；

(2) 如图，下顶点为 A，过点 $B(0,2)$ 作一条与 y 轴不重合的直线.该直线交椭圆 E 于 C,D 两点.直线 AD，AC 分别交 x 轴于点 H，G.求证：$\triangle ABG$ 与 $\triangle AOH$ 的面积之积为定值，并求出该定值.

22.（12分）

已知函数 $f(x)=\ln x$，$g(x)=\frac{a}{x}$，其中 $a>0$.

(1) 若 $F(x)=\frac{1}{g(\sin(x-1))}-f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，求 a 的取值范围.

(2) 证明：$\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{1}{k+1}<\ln(n+1)$，$n,k\in\mathbf{N}^*$