# 开封市2023届高三年级第三次模拟考试
# 数学（理科）参考答案

## 一、选择题（每小题5分，共60分）

| 题号 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | A | C | B | D | C | A | D | A | D | C | C | B |

## 二、填空题（每小题5分，共20分）

13. $(2,1)$(答案不唯一)　　14. $2$　　15. $\frac{1}{3}$　　16. $2\sqrt{2}-1$

## 三、解答题（共70分）

17.（1）由频率分布直方图得：

“锻炼时间达标”的学生的概率估计为$(0.010+0.005)\times 10=0.15$，……2分

所以该校“锻炼时间达标”的学生人数估计为$1000\times 0.15=150$（人）. ……4分

（2）样本数据中：“锻炼时间达标”的学生人数为$100\times 0.15=15$（人），其中女生有5人，男生有10人，

“锻炼时间未达标”的女生人数为$50-5=45$（人），男生人数为$50-10=40$（人），

所以2×2列联表为：

| | 锻炼时间达标 | 锻炼时间未达标 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 男 | 10 | 40 | 50 |
| 女 | 5 | 45 | 50 |
| 合计 | 15 | 85 | 100 |

……8分

$k=\dfrac{100\times(10\times 45-5\times 40)^2}{50\times 50\times 15\times 85}\approx 1.961<2.706$，……10分

所以没有90%的把握认为“锻炼时间达标”与性别有关. ……12分

18.（1）记等差数列$a$，$b$，$c$的公差为$d$，设$a=b-d$，$c=b+d$，

由$7\sin A=3\sin C$得：$7a=3c$，即$7(b-d)=3(b+d)$，可得：$d=\frac{2}{5}b$，……3分

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{(b-d)^2+(b+d)^2-b^2}{2(b-d)(b+d)}=\frac{b^2+2d^2}{2(b^2-d^2)}=\frac{\frac{33}{25}b^2}{\frac{42}{25}b^2}=\frac{11}{14}.$$ ……6分

（2）由$\cos B=\frac{11}{14}$得$\sin B=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，……8分

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}(b-d)(b+d)\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，……10分

将$d=\frac{2}{5}b$代入解之可得$b=5$. ……12分

19.（1）证明：连接$AF$，

$\because$四边形$ABCD$是圆柱$OO_1$的轴截面，$\therefore AB$为圆$O$的直径，$\therefore AF\perp BF$，

又 $EF$ 是圆柱的母线，$\therefore EF \perp$ 平面$ABF$，$\because BF \subset$ 平面$ABF$，$\therefore EF \perp BF$，……3 分

又$\because AF \cap EF = F$，$AD // EF$，$\therefore BF \perp$ 平面$ADEF$，

又$\because P$ 是线段 $AD$ 的中点，$\therefore$平面 $ADEF$ 即为平面 $EPF$，$\therefore BF \perp$ 平面$EPF$，……5 分

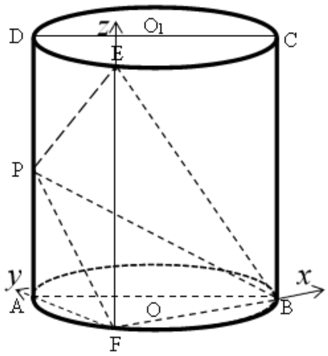
$\because BF \subset$ 平面$BEF$，$\therefore$ 平面$EPF \perp$ 平面$BEF$．……6 分

（2）由（1）知 $BF \perp$ 平面$EPF$，$\therefore AF$ 为 $AB$ 在平面 $EPF$ 内的射影，

$\therefore AB$ 与平面 $EPF$ 所成角为 $\angle BAF$，由已知 $\angle BAF = 60^\circ$，$AB = 4$，$BC = 6$，

$\therefore BF = AB\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}, AF = AB\cos 60^\circ = 2$，……7 分

以 $F$ 为坐标原点，$FB, FA, FE$ 所在直线分别为 $x, y, z$ 轴建立空间直角坐标系，




则 $F(0,0,0), E(0,0,6), P(0,2,3), B\left(2\sqrt{3},0,0\right)$，

$\overrightarrow{EP} = (0,2,-3), \overrightarrow{EB} = \left(2\sqrt{3},0,-6\right)$，……8 分

$\because BF \perp$ 平面$EPF$，

所以 $\overrightarrow{FB} = \left(2\sqrt{3},0,0\right)$ 是平面$EPF$ 的一个法向量，……9 分

设 $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$ 是平面 $EPB$ 的一个法向量，

则 $\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EP} = 0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EB} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2y - 3z = 0, \\ 2\sqrt{3}x - 6z = 0, \end{cases}$ 令 $x = 1$ 得 $\boldsymbol{n} = \left(1, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，……10 分

$\therefore \cos\left\langle \overrightarrow{FB}, \boldsymbol{n} \right\rangle = \dfrac{\overrightarrow{FB}\cdot\boldsymbol{n}}{\left|\overrightarrow{FB}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$，……11 分

所以二面角 $F - PE - B$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{5}$．……12 分



20.（1）当 $m = 1$ 时，$PF_1 \perp x$ 轴，设 $P$ 点坐标为 $(c，y_0)$ 代入椭圆方程得：

$\dfrac{c^2}{a^2} + \dfrac{{y_0}^2}{b^2} = 1$，所以 ${y_0}^2 = \dfrac{b^4}{a^2}$，即 $|PA| = \dfrac{2b^2}{a} = 3$，……1 分　　又因为 $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{1}{2}, a^2 = b^2 + c^2$，……2 分

解得：$a = 2, b = \sqrt{3}, c = 1$，所以椭圆 $C$ 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$．……4 分

（2）设 $P(x_0，y_0), A(x_1，y_1), B(x_2，y_2), PA: x = t_1 y - c, PB: x = t_2 y + c$．……5 分

由 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ x = t_1 y - c \end{cases}$ 得：$\left(b^2 t_1^2 + a^2\right)y^2 - 2b^2 c t_1 y - b^4 = 0$，

所以 $y_1 y_0 = -\dfrac{b^4}{b^2 t_1^2 + a^2}$，同理可得：$y_2 y_0 = -\dfrac{b^4}{b^2 t_2^2 + a^2}$，……7 分

由 $\begin{cases} \overrightarrow{PF_1} = m\overrightarrow{F_1 A}, \\ \overrightarrow{PF_2} = n\overrightarrow{F_2 B}, \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} m y_1 + y_0 = 0, \\ n y_2 + y_0 = 0, \end{cases}$……8 分

所以，$m+n=-\left(\dfrac{y_0}{y_1}+\dfrac{y_0}{y_2}\right)=-\left(\dfrac{y_0^2}{y_0y_1}+\dfrac{y_0^2}{y_0y_2}\right)=-\left(\dfrac{y_0^2}{-\dfrac{b^4}{b^2t_1^2+a^2}}+\dfrac{y_0^2}{-\dfrac{b^4}{b^2t_2^2+a^2}}\right)$

$=\dfrac{y_0^2}{b^4}(b^2{t_1}^2+b^2{t_2}^2+2a^2)=\dfrac{y_0^2}{b^4}(b^2(\dfrac{x_0+c}{y_0})^2+b^2(\dfrac{x_0-c}{y_0})^2+2a^2)=\dfrac{1}{b^4}(2b^2x_0^2+2a^2y_0^2+2b^2)$

$=\dfrac{1}{b^4}(2a^2b^2+2b^2)=\dfrac{2\left(a^2+1\right)}{b^2}=\dfrac{10}{3}$，……10 分

所以 $3a^2+3=5b^2$，又 $2b^2=3a$，解得：$\begin{cases}a=2\\b^2=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\b^2=\dfrac{3}{4}\end{cases}$（舍），

所以椭圆 $C$ 的标准方程为：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……12 分

21.（1）函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,+\infty\right)$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+a$，……1 分

当 $a\ge0$ 时，$f'(x)>0$，此时 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；……2 分

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0\Rightarrow0<x<-\dfrac{1}{a}$，$f'(x)<0\Rightarrow x>-\dfrac{1}{a}$，

此时 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. ……3 分

综上可知：当 $a\ge0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,-\dfrac{1}{a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(-\dfrac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减. ……4 分

（2） 由（1）知 ：当 $a\ge0$ 时，$f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，

存在 $0<m<n$，使得 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[m,n\right]$，所以 $f\left(x\right)\in\left[\ln m+ma,\ln n+na\right]$，

$f\left(f\left(x\right)\right)$ 的定义域也为 $\left[m,n\right]$，需满足：$\left[\ln m+ma,\ln n+na\right]\subseteq\left[m,n\right]$，……6 分

即 $\begin{cases}\ln m+\left(a-1\right)m\ge0,\\ \ln n+\left(a-1\right)n\le0,\end{cases}$ 设函数 $h\left(x\right)=\ln x+\left(a-1\right)x$，则上式转化为 $h\left(m\right)\ge0$ 且 $h\left(n\right)\le0$，

由 $h'(x)=\dfrac{1}{x}+a-1$ 可知：……8 分

①当 $a\ge1$ 时，$h'(x)>0$，函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上单调递增，不成立；……9 分

②当 $0\le a<1$ 时，函数 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{1-a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{1}{1-a},+\infty\right)$ 上单调递减，

因为 $h\left(m\right)\ge0$，所以 $h\left(x\right)_{\max}=h\left(\dfrac{1}{1-a}\right)\ge0$，得 $a\ge1-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，

取 $n=\dfrac{1}{\left(1-a\right)^2}$，则 $h\left(\dfrac{1}{\left(1-a\right)^2}\right)=2\ln\dfrac{1}{1-a}-\dfrac{1}{1-a}$，

设 $g\left(x\right)=2\ln x-x\left(x\ge\mathrm{e}\right)$，$g'(x)=\dfrac{2}{x}-1<0$，所以 $g\left(x\right)$ 在 $\left[\mathrm{e},+\infty\right)$ 上单调递减，

所以 $g\left(x\right)\le g\left(\mathrm{e}\right)=2-\mathrm{e}<0$，所以 $h\left(n\right)<0$，成立. ……11 分

综上可知：$a$ 的取值范围为$\left[1-\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$. ……12 分

22.（1）$\because P\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$，$\therefore P$ 的直角坐标为$\left(1,\sqrt{3}\right)$，又等边$\Delta OPQ$ 的边长为 2，

$\therefore$ 圆 $P$ 的直角坐标方程为：$(x-1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=4$，……2 分

$\because CQ$ 的直角坐标方程为：$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$，即 $x+\sqrt{3}y-2=0$，

$\therefore CQ$ 的极坐标方程为：$\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-2=0$；……4 分

（2）设 $A$，$B$ 两点的极坐标分别为 $A(\rho_1,\theta),B(\rho_2,\theta)$，

$\because$ 圆 $P$ 的直角坐标方程为：$(x-1)^2+\left(y-\sqrt{3}\right)^2=4$，

$\therefore$ 圆 $P$ 的极坐标方程为：$(\rho\cos\theta-1)^2+\left(\rho\sin\theta-\sqrt{3}\right)^2=4$，……6 分

即 $\rho^2-2\left(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\right)\rho=0$，$\therefore\ \rho_1=2\left(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\right)$，

直线 $CQ$ 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta-2=0$，$\therefore\ \rho_2=\frac{2}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}$，……8 分

$\therefore\ |OA|\cdot|OB|=\rho_1\rho_2==2\left(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}=4$.

综上所述：$|OA|\cdot|OB|$ 为定值 4. ……10 分

23.（1）根据三角形不等式得，$f(x)=|x-a|+|x-b|\geq|x-a-(x-b)|=|a-b|$，……2 分

$\because\ |a-b|>c$，$\therefore\ f(x)>c$ 恒成立，不等式 $f(x)>c$ 的解集为 $\mathbf{R}$. ……4 分

（2）当 $b=1$ 时，不等式 $f(x)<2-|a-2|$ 的解集非空，

即存在 $x$ 使不等式 $f(x)=|x-a|+|x-1|<2-|a-2|$ 成立，即 $f(x)_{\min}<2-|a-2|$ 成立，……6 分

$\because\ f(x)\geq|(x-a)-(x-1)|=|a-1|$，$f(x)_{\min}=|a-1|$，

$\therefore\ |a-1|<2-|a-2|$，即 $|a-1|+|a-2|<2$，……8 分

当 $a\leq1$, $|a-1|+|a-2|=3-2a<2,a>\frac{1}{2},\therefore\frac{1}{2}<a\leq1$,

当 $1<a<2$, $|a-1|+|a-2|=1<2,\therefore1<a<2$,

当 $a\geq2$, $|a-1|+|a-2|=2a-3<2,a<\frac{5}{2},\therefore2\leq a<\frac{5}{2}$,

综上所述：$a$ 的取值范围是$\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$. ……10 分