

名校联盟 2020 届普通高中教育教学质量监测考试
全国 I 卷 理科数学

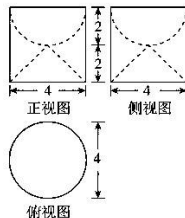
注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分.
2. 答题前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在本试卷相应的位置.
3. 全部答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.
4. 本试卷满分 150 分,测试时间 120 分钟.
5. 考试范围:高考全部内容.

第 I 卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若复数 z 满足 $z-1-i=2i+1$, 则 $|z| =$
A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. 3
2. 已知集合 $A=\{2a-1, a^2, 0\}$, $B=\{1-a, a-5, 9\}$, 且 $A \cap B = \{9\}$, 则
A. $A = \{9, 25, 0\}$ B. $A = \{5, 9, 0\}$
C. $A = \{-7, 9, 0\}$ D. $A \cup B = \{-7, 9, 0, 25, -4\}$
3. 已知向量 $a = (x^2 - 2x, 1)$, $b = (1, -3)$, 则“ $-1 < x < 3$ ”是“ a, b 的夹角为钝角”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
4. 将函数 $y = 2\sin(2x + \frac{\pi}{4})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 所得函数
A. 在区间 $(-\frac{3\pi}{8}, \frac{\pi}{8})$ 上单调递增 B. 在区间 $(-\frac{5\pi}{8}, -\frac{\pi}{8})$ 上单调递减
C. 以 $x = \frac{\pi}{8}$ 为一条对称轴 D. 以 $(\frac{3\pi}{8}, 0)$ 为一个对称中心
5. 已知一个几何体的三视图如图所示, 则此几何体的体积为
A. $\frac{8\pi}{3}$ B. 8π
C. $\frac{16\pi}{3}$ D. 12π
6. 改编自中国神话故事的动画电影《哪吒之魔童降世》自 7 月 26 日首映, 在不到一个月的时间, 票房收入就超过了 38 亿元, 创造了中国动画电影的神话. 小明和同学相约去电影院观看《哪吒之魔童降世》, 影院的三个放映厅分别在 7:30, 8:00, 8:30 开始放映, 小明和同学大约在 7:40 至 8:30 之间到达影院, 且他们到达影院的时间是随机的, 那么他们到达后等待的时间不超过 10 分钟的概率是
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{4}$
7. 已知函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - ax + a)$ 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上为减函数, 则实数 a 的取值范围是
A. $(-\infty, 1]$ B. $[-\frac{1}{2}, 1]$
C. $(-\frac{1}{2}, 1]$ D. $(-\frac{1}{2}, +\infty)$

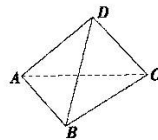


8. 在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 为函数 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}|x|$ 图象上的两点, 若线段 AB 的中点 M 恰好落在曲线 $x^2 - 3y^2 + 3 = 0$ 上, 则 $\triangle OAB$ 的面积为

A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

9. 一只蚂蚁从正四面体 $A-BCD$ 的顶点 A 点出发, 沿着正四面体 $A-BCD$ 的棱爬行, 每秒爬一条棱, 每次爬行的方向是随机的, 则第 4 秒时蚂蚁在 A 点的概率为

A. $\frac{20}{27}$ B. $\frac{7}{9}$
C. $\frac{7}{27}$ D. $\frac{2}{9}$

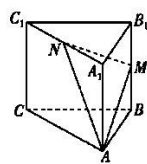


10. 在梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD$, $BC = \sqrt{3}CD$, 则 $\angle ADB$ 的最大值为

A. $\frac{\pi}{4}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{2\pi}{3}$

11. 我国古代的数学著作《九章算术·商功》中, 将底面是直角三角形的直三棱柱称为“堑堵”. 在如图所示的“堑堵” $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AB = AC = AA_1 = 2$, M, N 分别是 BB_1 和 A_1C_1 的中点, 则平面 AMN 截“堑堵” $ABC-A_1B_1C_1$ 所得截面图形的面积为

A. $\frac{2\sqrt{21}}{3}$ B. $\frac{4\sqrt{21}}{3}$
C. $\frac{2\sqrt{7}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{7}}{3}$



12. 已知函数 $f(x) = a \ln x - 2x$, 若存在 $x \in \mathbb{N}^*$, 使 $f(x) > 0$ 成立, 则实数 a 的取值范围是

A. $(2e, +\infty)$ B. $(\frac{4}{\ln 2}, +\infty)$ C. $(\frac{6}{\ln 3}, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13 题~第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22 题~第 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 4x - 3y - 6 \leq 0 \\ 2x - 2y + 1 \geq 0 \\ x + 2y - 1 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = |x - y + 1|$ 的最大值为 _____.

14. 在 $(x^2 + x - 1)(x - a)^5$ 的展开式中, 含 x^5 项的系数为 14, 则实数 a 的值为 _____.

15. 已知实数 x, y 满足 $y \geq 2x > 0$, 则 $\frac{y}{x} + \frac{9x}{2x + y}$ 的最小值为 _____.

16. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的左、右焦点, P 为双曲线右支上异于顶点的任意一点, 若 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆的圆心为 I , 则圆心 I 到圆 $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ 上任意一点的距离的最小值为 _____.

三、解答题: 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $S_2 = 10$, $S_n = \frac{n-1}{n+1}a_{n+1} + 2 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{2^n(n+1)!} (n \in \mathbb{N}^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{1}{2} \leq T_n < 1$.

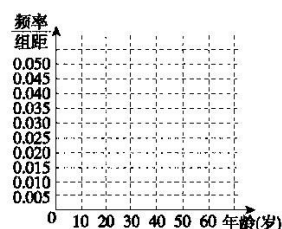
18. (本小题满分 12 分)

某市为了了解该市教师年龄分布情况,对年龄在 $[20,60]$ 内的 5000 名教师进行了抽样统计,根据分层抽样的结果,统计员制作了如下的统计表格:

年龄区间	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60]$
教师人数		2000	1300	
样本人数			130	

由于不小心,表格中部分数据被污染,看不清了,统计员只记得年龄在 $[20,30)$ 的样本人数比年龄在 $[50,60]$ 的样本人数多 10,根据以上信息回答下列问题:

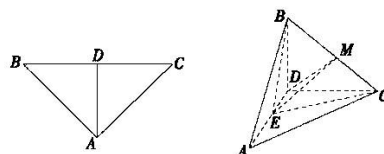
- (1)求该市年龄在 $[50,60]$ 的教师人数;
- (2)试根据上表做出该市教师按照年龄的人数频率分布直方图,并求该市教师年龄的平均数 $\bar{x}$ 及方差 s^2 (同一组的数据用该组区间的中点值作代表).



19. (本小题满分 12 分)

如图,将斜边长为 $4\sqrt{2}$ 的等腰直角 $\triangle ABC$ 沿斜边 BC 上的高 AD 折成直二面角 $B-AD-C$, E 为 AD 中点.

- (1)求二面角 $A-BC-E$ 的余弦值;
- (2) M 为线段 BC 上一动点,当直线 DM 与平面 BCE 所成的角最大时,求三棱锥 $M-CDE$ 外接球的体积.



20. (本小题满分 12 分)

动圆 P 过定点 $A(2,0)$,且在 y 轴上截得的弦 GH 的长为 4.

- (1)若动圆圆心 P 的轨迹为曲线 C ,求曲线 C 的方程;
- (2)在曲线 C 的对称轴上是否存在点 Q ,使过点 Q 的直线 l' 与曲线 C 的交点 S, T 满足 $\frac{1}{|QS|^2} + \frac{1}{|QT|^2}$ 为定值?若存在,求出点 Q 的坐标及定值;若不存在,请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ax + \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{e^x}{x} - 1$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的单调性;

(2) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, 设 $P(x, y)$ 为函数 $y = \ln \frac{x \cdot g(x) - 1}{x \cdot f(x) - 1}$ ($x \in (0, +\infty)$) 图象上任意一点, 直线 OP 的斜率为 k , 求证: $0 < k < 1$.

请考生从第 22、23 题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔将答题卡上所选题目对应的方框涂黑, 按所选涂题号进行评分; 多涂、多答, 按所涂的首题进行评分; 不涂, 按本选考题的首题进行评分.

22. (本小题满分 10 分)【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos\theta \\ y = 1 + \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 在以坐标原点为极点, x 轴正半轴

为极轴的极坐标系中, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} = 0$, P 为直线 l 上的任意一点.

(1) Q 为曲线 C 上任意一点, 求 P, Q 两点间的最小距离;

(2) 过点 P 作曲线 C 的两条切线, 切点为 A, B , 曲线 C 的对称中心为点 C , 求四边形 $PACB$ 面积的最小值.

23. (本小题满分 10 分)【选修 4-5: 不等式选讲】

若 $a > 0, b > 0$, 且 $2a + b + 2 = 3ab$.

(1) 求 $2a + b$ 的最小值;

(2) 是否存在 a, b , 使得 $a^2 + b^2 = 4\sqrt{2}$? 并说明理由.



自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国中学大联考 2020 届高三下学期模考试题及答案汇总（更新下载中），点击链接获得

<http://www.zizzs.com/c/202002/42364.html>