姓名______________准考证号______________

试题类型:A

秘密★启用前

数 学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在试卷和答题卡指定位置上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用0.5mm黑色笔迹签字笔写在答题卡上,写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数z满足$(1-i)^2z=1+i$,则$|z|=$

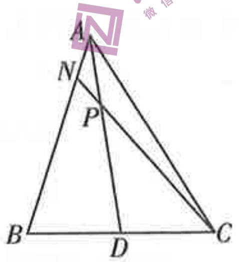
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\sqrt{2}$　　D. 2

2. 设A是一个数集,且至少含有两个数,若对任意$a,b\in A$,都有$a+b$、$a-b$、ab、$\frac{a}{b}\in A$(除数$b\neq 0$),则称A是一个数域,则下列集合为数域的是

A. **N**　　B. **Z**

C. **Q**　　D. $\{x|x\neq 0, x\in \mathbf{R}\}$

3. 如图,在△ABC中,D是BC边中点,$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,$CP$的延长线与$AB$交于$N$,则

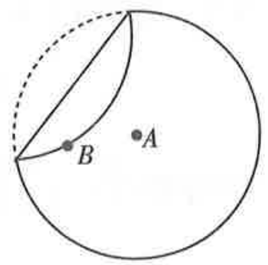


(第3题图)

A. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$　　B. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$　　D. $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}$

4. 折纸是一种以纸张折成各种不同形状的艺术活动,折纸大约起源于公元1世纪或者2世纪时的中国.折纸与自然科学结合在一起,不仅成为建筑学院的教具,还发展出了折纸几何学成为现代几何学的一个分支.如图,现有一半径为4的圆纸片(A为圆心,B为圆内的一定点),且$|AB|=2$,如图将圆折起一角,使圆周正好过点B,把纸片展开,并留下一条折痕,折痕上到A,B两点距离之和最小的点为P,如此往复,就能得到越来越多的折痕,设P点的轨迹为曲线C,在C上任取一点M,则△MAB面积的最大值是



(第4题图)

A. 2　　B. 3　　C. $\sqrt{2}$　　D. $\sqrt{3}$

5. 小李,小王相约周日到晋祠游玩,两人约定早上7:00各自从家出发,小李乘坐301路公交,路上所需时间(单位:分钟)服从正态分布$N(44,4)$.小王乘坐804路公交,路上所需时间(单位:分钟)服从正态分布$N(40,16)$.下列说法从统计角度可认为不合理的是

(参考数据:$Z\sim N(\mu,\sigma^2)$,则$P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)\approx0.6827$,$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)\approx0.9545$,$P(\mu-3\sigma<Z<\mu+3\sigma)\approx0.9973$)

A. 小王在7:28前到达晋祠的可能性不超过1%

B. 小王比小李在7:50前到达晋祠的可能性更小

C. 小李和小王在7:48前到达晋祠的可能性一样

D. 小李比小王在7:44前到达晋祠的可能性更大

6. 已知$a\leq 1$,函数$f(x)=(x-1)e^x-\frac{a}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2(x\geq 0)$,则

A. $f(x)$有最小值,有最大值　　B. $f(x)$无最小值,有最大值

C. $f(x)$有最小值,无最大值　　D. $f(x)$无最小值,无最大值

7. 正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,$AB=2$,P为上底面$A_1B_1C_1D_1$的中心,M是棱AB的中点,正四棱柱的高$h\in[\sqrt{3},\ 2\sqrt{2}]$,点$M$到平面$PCD$的距离的取值范围是

A. $\left[3,\frac{32}{9}\right]$　　B. $\left[\sqrt{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right]$

C. $[\sqrt{3},2]$　　D. $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right]$

8. 若对圆$C:x^2+(y-2)^2=1$上任意一点P,曲线$y=\ln x+a$上存在点Q,使得$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$,则实数$a$的取值范围是

A. $\left[1-\frac{\ln 3}{2},+\infty\right)$　　B. $\left[1+\frac{\ln 3}{2},+\infty\right)$

C. $[1-2\ln 3,+\infty)$　　D. $[1+2\ln 3,+\infty)$

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 已知函数$f(x)=\cos(x+2\varphi)-2\cos\varphi\cos(x+\varphi)-\sin x$，则

A. $f(x)$的图象关于点$\left(-\frac{\pi}{4},0\right)$中心对称

B. $f(x)$的图象关于直线$x=-\frac{\pi}{2}$对称

C. 函数$f(x)$在$\left[-\frac{3\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$上单调递增

D. 函数$f(x)$在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值是$-\sqrt{2}$

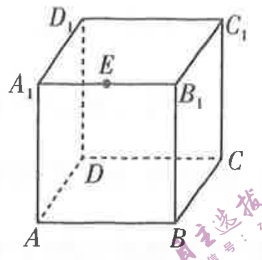
10. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，E在棱A_1B_1上运动(不含端点)，则

A. 侧面AA_1D_1D中不存在直线与DE垂直

B. 平面A_1DE与平面$ABCD$所成二面角为$\frac{\pi}{4}$

C. E运动到A_1B_1的中点时，A_1C上存在点P，使BC // 平面AEP

D. P为A_1C中点时，三棱锥$E-PBC_1$体积不变



(第10题图)

11. 甲、乙、丙三人相互做传球训练，第1次由甲将球传出，每次传球时，传球者可将球传给另外两人中的任何一人，设第n次传球后球在甲手中的方法数为a_n，在乙手中的方法数为b_n，则

A. $a_n+a_{n-1}=2^{n-1}$

B. $a_n=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$

C. 存在唯一实数$t\in\mathbf{R}$，使得$\{a_n+ta_{n-1}\}$为等比数列

D. 当n为偶数时，$a_n>b_n$

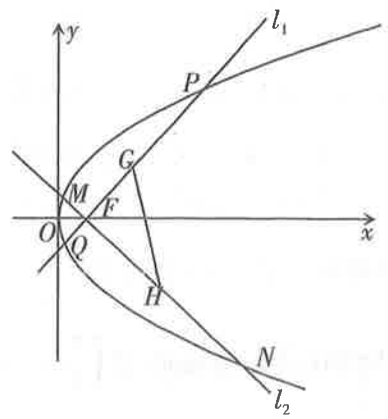
12. 已知抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F，过F作两条互相垂直的直线l_1，l_2，l_1与C相交于P，Q，l_2与C相交于M，N，PQ的中点为G，MN的中点为H，则

A. $\frac{1}{|PF|}+\frac{1}{|QF|}=2$

B. $\frac{1}{|PQ|}+\frac{1}{|MN|}=\frac{1}{4}$

C. $|PQ|+|MN|$的最小值为16

D. 当$|GH|$最小时，直线GH的斜率不存在



(第12题图)

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 2022年11月底，人工智能对话聊天机器人ChatGPT推出，迅速在社交媒体上走红，短短5天，注册用户数就超过100万.截至2023年2月，这款新一代对话式人工智能便在全球范围狂揽1亿名用户，并成功从科技界破圈，成为街头巷尾的谈资.2023年2月各天全球该软件注册人数数据(单位：万人)从小到大排列如下：

16	22	36	58	64	68	70	102	106	108	110	124	126	154
162	165	166	186	210	226	230	256	310	321	458	468	532	789

该软件2023年2月全球注册人数的第75百分位数是__▲__.

14. 已知直线$l_1:\sqrt{3}x-y-2=0$，$l_2:x-\sqrt{3}y+2=0$，圆$C:(x-a)^2+y^2=r^2(r>0)$，若圆C与直线l_1，l_2都相切，则$r=$__▲__.

15. 杨辉三角在我国南宋数学家杨辉1261年所著的《详解九章算法》一书中被记载.它的开头几行如图所示，它包含了很多有趣的组合数性质，如果将杨辉三角从第1行开始的每一个数C_n^r都换成分数$\frac{1}{(n+1)C_n^r}$，得到的三角形称为"莱布尼茨三角形"，莱布尼茨由它得到了很多定理，甚至影响到了微积分的创立，则"莱布尼茨三角形"第8行第5个数是__▲__；若$S_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\cdots+\frac{1}{nC_{n-1}^{n-4}}+\frac{1}{(n+1)C_n^{n-3}}(n\geqslant 3)$，则$S_n=$__▲__(用含$n$的代数式作答).(第一空2分，第二空3分)

	杨辉三角	莱布尼茨三角形	
第0行	1	1	第0行
第1行	1　1	$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{2}$	第1行
第2行	1　2　1	$\frac{1}{3}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{1}{3}$	第2行
第3行	1　3　3　1	$\frac{1}{4}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{12}$　$\frac{1}{4}$	第3行
⋮	⋮	⋮	⋮

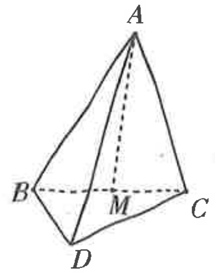
(第15题图)

16. 已知函数$f\left(x^3+\frac{\pi}{3}\right)$为奇函数，$g(x)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称，若$f(x)+g(x)=\sin x$，则$g(x)$的最大值是__▲__.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10分）

在三棱锥$A-BCD$中，$\triangle BCD$是等边三角形，$\angle ADB=\angle ADC$，M是BC边的中点.



（第17题图）

（1）求证：$BC\perp AD$；

（2）$MA=3$，$BC=2\sqrt{3}$，从以下两个条件中任选一个，求直线BD与平面ACD所成角的余弦值.

①平面ABC与平面BCD所成二面角为$\frac{2\pi}{3}$；

②三棱锥$A-BCD$的体积为$3\sqrt{3}$.

18.（12分）

已知$\triangle ABC$中，角A,B,C所对的边分别为a,b,c，$a=7$，$2c\cos B=(3a-2b)\cos C$.

（1）求$\cos C$；

（2）若$B=2C$，M为$\triangle ABC$的内心，求$\triangle AMC$的面积.

19.（12分）

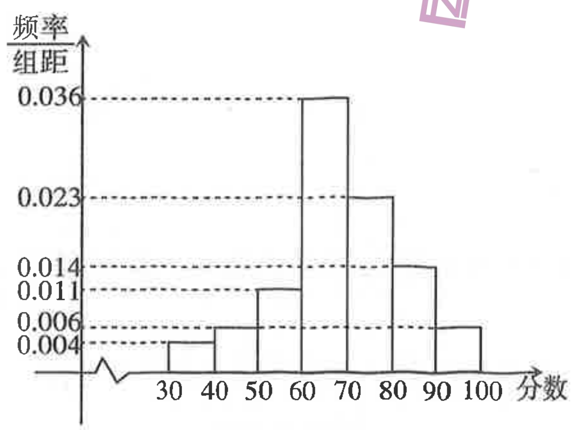
已知$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，若$a_1=b_1=1$，$a_2=b_2$，$a_1+a_3=b_3$.

（1）求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

（2）对任意的正整数n，设$c_n=\begin{cases}a_n+b_n, n\text{为奇数},\\ a_nb_n, n\text{为偶数},\end{cases}$求数列$\{c_n\}$的前$2n$项和.

20.（12分）

在现实生活中，每个人都有一定的心理压力，而且这种压力将伴随着现代生活节奏的加快和社会竞争日趋加速而逐渐增大.心理压力产生的主要原因是个人目标期望值与现实状况之间的差距，这种差距越大产生的心理压力就越大，当心理压力达到一定程度时，不但不会产生积极的动力，反而会使人的身体经络系统失去平衡，进而产生如焦虑症、恐慌症、失眠症等其他心理疾病.某市为了解市民压力情况，随机对该市的1000位市民进行了心理压力测试，并对他们的压力分数进行统计，得到如图所示的频率分布直方图.



（第20题图）

（1）压力分数越接近100表示压力越大，80分为临界分数，压力分数不低于临界分数的则需要降低追求目标或充分休息.以样本的频率作为总体的概率，在该市随机调查10位市民，X表示其中需要降低追求目标或充分休息的人数，求X的期望；

（2）从样本中压力分数在$[80,90)$，$[90,100]$的两组市民中，用样本量比例分配的分层随机抽样的方法抽取10人，再从这10人中随机选出3人，求选出的3人中恰有2人压力分数在$[80,90)$中的概率；

（3）若一个总体划分为两层，通过分层随机抽样，各层抽取的样本量、样本平均数和样本方差分别为：$m,\bar{x},s_1^2$；$n,\bar{y},s_2^2$.记总的样本平均数为$\bar{\omega}$，样本方差为s^2，证明：

①$\bar{\omega}=\frac{m}{m+n}\bar{x}+\frac{n}{m+n}\bar{y}$；

②$s^2=\frac{m[s_1^2+(\bar{x}-\bar{\omega})^2]+n[s_2^2+(\bar{y}-\bar{\omega})^2]}{m+n}$.

21.（12分）

已知双曲线$E:\frac{x^2}{3}-y^2=1$的左、右焦点分别为F_1,F_2，A是直线$l:y=-\frac{2}{3}x$上不同于原点O的一个动点，斜率为k_1的直线AF_1与双曲线E交于M,N两点，斜率为k_2的直线AF_2与双曲线E交于P,Q两点.

（1）求$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$的值；

（2）若直线OM,ON,OP,OQ的斜率分别为$k_{OM},k_{ON},k_{OP},k_{OQ}$，问是否存在点$A$，满足$k_{OM}+k_{ON}+k_{OP}+k_{OQ}=0$，若存在，求出$A$点坐标；若不存在，说明理由.

22.（12分）

设函数$f(x)=x\sin x, x\in\mathbf{R}$.

（1）求$f(x)$在区间$(2k\pi,2k\pi+\pi)$，$k\in\mathbf{N}$上的极值点个数；

（2）若x_0为$f(x)$的极值点，则$|f(x_0)|\geq\lambda\ln(1+x_0^2)$，求整数$\lambda$的最大值；