

2022 学年第二学期浙江北斗星盟阶段性联考

高二年级数学答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.C 2.D 3.B 4.C 5.B 6.A 7.A 8.C

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9.ABD 10.AD 11.ACD 12.ABD

三、填空题：本大题共 4 小题，每题 5 分，共 20 分。

13. n 14. -6 15. 414 16. $\frac{1}{3e}$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解：(1) 旋转体由两个同底的圆锥组成，

过 B 作 $BE \perp AC$ 于 E ，则 $BE = \frac{60}{13}$ ， $AE = \frac{144}{13}$ ， $CE = \frac{25}{13}$

$$\therefore V_{\text{旋转体}} = \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{60}{13}\right)^2 \times \frac{144}{13} + \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{60}{13}\right)^2 \times \frac{25}{13} = \frac{1200}{13}\pi \dots\dots\dots 5\text{分}$$

(2) 把圆锥 AE 沿 AB 展开得到一扇形，则 $\angle BAB_1 = \frac{2\pi \times \frac{60}{13}}{12} = \frac{10}{13}\pi \dots\dots\dots 6\text{分}$

从 D 沿旋转体表面一周到达 B 的最短路程：

$$S = DB_1 = \sqrt{6^2 + 12^2 - 2 \times 6 \times 12 \times \cos \frac{10}{13}\pi} = \sqrt{180 + 144 \cos \frac{3}{13}\pi} \dots\dots\dots 8\text{分}$$

$$\because \cos \frac{3}{13}\pi > \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \therefore S = \sqrt{180 + 144 \cos \frac{3}{13}\pi} > \sqrt{180 + 72\sqrt{2}} = 6\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$$

所以从 D 沿旋转体表面一周到达 B 的最短路程 S 大于 $6\sqrt{5 + 2\sqrt{2}} \dots\dots\dots 10\text{分}$

18. (1) 零假设为 H_0 : ChatGPT 对服务业影响的大小无关.

$$\text{根据表中数据得 } \chi^2 = \frac{130 \times (60 \times 20 - 40 \times 10)^2}{70 \times 60 \times 100 \times 30} \approx 6.603 < 6.635 \dots\dots\dots 4\text{分}$$

所以根据小概率值 $\alpha = 0.01$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为无关. $\dots\dots\dots 6\text{分}$

(2) 由题意得，采用比例分配的分层随机抽样方法抽取出的 5 人中，有 3 人认为人工智能会在服务业中广泛应用，有 2 人认为人工智能不会在服务业中广泛应用，

则 X 的可能取值为 1, 2, 3,

X	1	2	3
P	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{10}$

以 $P(X=1)=\frac{C_1^3 C_2^2}{C_3^5}=\frac{3}{10}$, $P(X=2)=\frac{C_2^3 C_1^2}{C_3^5}=\frac{3}{5}$, $P(X=3)=\frac{C_3^3}{C_3^5}=\frac{1}{10}$, 所以 X 的分布列为 $E(X)=1 \times \frac{3}{10} + 2 \times \frac{3}{5} + 3 \times \frac{1}{10} = \frac{9}{5}$12 分

19. (1) $\because c \sin A = \sqrt{3}a \cos C$, 由正弦定理得, $\sin C \sin A = \sqrt{3} \sin A \cos C$ 2 分

又 $\sin A > 0, \cos C \neq 0$, $\therefore \sin C = \sqrt{3} \cos C$, $\tan C = \sqrt{3}$, $\therefore C = 60^\circ$4 分

(2) $\frac{8S - ab + 2b^2}{2bc} = 2 \sin A + \cos A$ 6 分

$= \sqrt{5} \sin(A + \varphi)$, 其中 $\sin \varphi = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \varphi = \frac{2\sqrt{5}}{5}$,8 分

$\because$ 锐角 $\triangle ABC$, $\therefore A \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$, 从而得 $\frac{2b^2 - ab + 8S}{2bc} \in \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{5}\right]$12 分

20. (1) 由题意有: $\frac{1}{(|x+b|+a)^2} = \frac{1}{(|2-x+b|+a)^2}$,

即 $|x+b| = |2-x+b|$, $\therefore x+b = 2-x+b$ (舍) 或 $x+b = -2+x-b$,

解得 $b = -1$;3 分

(2) 当 $x=0$ 时, 不等式 $f(x) \geq kx^2$ 显然成立;4 分

当 $x \neq 0$ 时, $f(x) \geq kx^2$ 等价于 $k \leq \frac{1}{[x(|x-1|+a)]^2}$,6 分

设 $g(x) = x(|x-1|+a) = \begin{cases} -x^2 + (a+1)x, & x \in (0, 1] \\ x^2 + (a-1)x, & x \in (1, 2] \end{cases}$,7 分

① 当 $\frac{a+1}{2} < 1$ 即 $0 < a < 1$ 时, $x \in (0, 1]$ 时, $g(x) \leq g\left(\frac{a+1}{2}\right) = \frac{(a+1)^2}{4} \in \left(\frac{1}{4}, 1\right)$, $x \in (1, 2]$ 时,

$g(x) \leq g(2) = 2a+2 \in (2, 4)$, $\therefore g(2) > g\left(\frac{a+1}{2}\right)$, $\therefore g(x)_{\max} = g(2) = 2a+2$;9 分

② 当 $a \geq 1$ 时, $x \in (0, 1]$ 时, $g(x) \leq g(1) = a$, $x \in (1, 2]$ 时, $g(x) \leq g(2) = 2a+2$,

$\therefore g(2) > g(1)$, $\therefore g(x)_{\max} = g(2) = 2a+2$,11 分

综上所述, $k \leq \frac{1}{4(a+1)^2}$12 分

21. 解: (1) $\because AB = AC = 2$, $\therefore AE \perp BC$. $\because$ 侧面 BCC_1B_1 为矩形, $\therefore BC \perp EF$,

$\because EF \cap AE = E$, $EF \subset$ 平面 $AEFA_1$, $AE \subset$ 平面 $AEFA_1$,

$\therefore BC \perp$ 平面 $AEFA_1$, 则 $BC \perp A_1E$,

则 $\angle A_1EA$ 是二面角 $A-BC-A_1$ 的平面角.2 分

则 $\tan \angle A_1EA = \frac{1}{2}$, 所以 $\sin \angle A_1EA = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos \angle A_1EA = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. 设

$AA_1 = x$, $\because AB \perp AC$, $AB = AC = 2$, $\therefore AE = CE = BE = \sqrt{2}$, $\because \angle A_1AB = \frac{2\pi}{3}$,

$\therefore A_1B^2 = x^2 + 2^2 - 2 \times 2x \cdot \cos \frac{2\pi}{3} = x^2 + 2x + 4$,

又 $A_1E^2 = A_1B^2 - BE^2 = x^2 + 2x + 4 - 2 = x^2 + 2x + 2$,4 分

在 $\triangle AEA_1$ 中, 由余弦定理 $A_1A^2 = A_1E^2 + AE^2 - 2 \times A_1E \times AE \times \cos \angle A_1EA$ 得:

$x^2 = x^2 + 2x + 4 - \frac{4\sqrt{10}}{5} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2}$, 即 $\frac{4\sqrt{10}}{5} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 2x + 4$, 平方整理得 $3x^2 - 4x - 4 = 0$, 得

$x = 2$ 或 $x = -\frac{2}{3}$ (舍), 即 AA_1 为 2.6 分

(2) 解法一: 建立以 E 为坐标原点, EA , EB , Ez 分别为 x , y , z 轴的空间直角坐标系如图:

过 A_1 作 $A_1H \perp$ 底面 ABC . $\because AA_1 = 2$, $\therefore A_1B^2 = x^2 + 2x + 4 = 12$, 则 $A_1B = 2\sqrt{3}$,

$A_1E = \sqrt{A_1B^2 - BE^2} = \sqrt{10}$, 则 $A_1H = A_1E \sin \angle A_1EA = \frac{\sqrt{5}}{5} \times \sqrt{10} = \sqrt{2}$, $AH = \sqrt{2}$.

所以 $A_1(2\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $B(0, \sqrt{2}, 0)$, $C(0, -\sqrt{2}, 0)$ 8 分

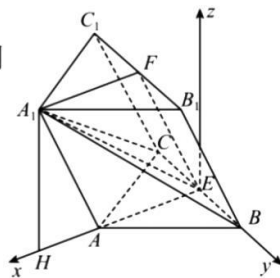
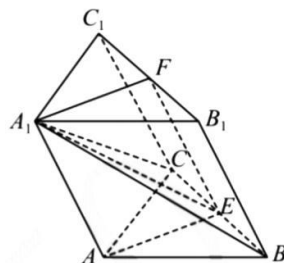
则 $\overrightarrow{A_1B} = (-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{BC} = (0, -2\sqrt{2}, 0)$, 设平面 A_1BC 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

由 $\vec{m} \cdot \overrightarrow{A_1B} = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}y - \sqrt{2}z = 0$, $\vec{m} \cdot \overrightarrow{BC} = -2\sqrt{2}y = 0$, 则 $y = 0$, 令 $x = 1$, 则

$z = -2$, 即 $\vec{m} = (1, 0, -2)$,10 分

$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AA_1} = (\sqrt{2}, 0, \sqrt{2})$, 设 $\overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{CC_1} = (\sqrt{2}m, 0, \sqrt{2}m)$, $0 < m < 1$, 设

$D(x, y, z)$, 则 $(x, y + \sqrt{2}, z) = (\sqrt{2}m, 0, \sqrt{2}m)$, $D(\sqrt{2}m, -\sqrt{2}, \sqrt{2}m)$, 设平面



A_1BD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\overrightarrow{BA_1} = (2\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}), \overrightarrow{BD} = (\sqrt{2}m, -2\sqrt{2}, \sqrt{2}m)$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA_1} = 2\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + \sqrt{2}z = 0$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = \sqrt{2}mx - 2\sqrt{2}my + \sqrt{2}mz = 0 \quad \text{令 } x = 2 - m, \text{ 则}$$

$$z = m - 4, y = -m, \vec{n} = (2 - m, -m, m - 4)$$

平面 DA_1B 与平面 A_1BC 所锐二面角为 α , $\cos \alpha = \frac{|10 - 3m|}{\sqrt{5}\sqrt{3m^2 - 12m + 20}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, 解得 $m = \frac{2}{3}$

, 所以, 存在 D 在 CC_1 的三等分点靠近 C_1 的分点处.12 分

解法二: 把三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 补为四棱柱如图, M_1 为 A_1G_1 中点, 过 D 作 $DH \perp M_1C$, 则

$DH \perp$ 平面 A_1BC 过 H 作 $HN \perp A_1B$, 连 DN 则 $\angle HND$ 为二面角 $D - A_1B - C$ 的平面角.....8 分

设 $HN = 2\sqrt{6}t, DC = x$, 则 $DN = 5t, DH = t, MC = \sqrt{10}$,

$$\cos \angle M_1CC_1 = \frac{3}{\sqrt{10}}, HC = \frac{3x}{\sqrt{10}}, \sin \angle M_1CC_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{t}{x} \text{ 由点 } H \text{ 到 } A_1B \text{ 的距离为 } 2\sqrt{6}t, \text{10 分}$$

$$\text{得到 } 2\sqrt{6}t = \frac{2\sqrt{10} - \frac{3x}{\sqrt{10}}}{\sqrt{6}}, t = \frac{x}{\sqrt{10}} \text{ 得 } x = \frac{4}{3} = \frac{2}{3}AB, \text{ 所以, 存在 } D \text{ 在 } CC_1 \text{ 的三等分点靠近 } C_1 \text{ 的}$$

分点处.12 分

22. (1) $g'(x) = \frac{1}{x} + 1$, 则 $g'(1) = 2$, 所以切线方程为: $y = 2x - 1$ 4 分

(2) $h(x) = x^2 - \ln x + (a-1)x + \frac{1}{4}$ (i) $h'(x) = 2x - \frac{1}{x} + (a-1)$, $x > 0$, 易知 $h'(x)$ 是单调函数,

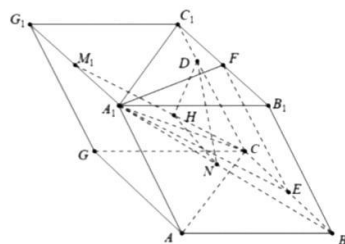
且有唯一零点 $x_0 (x_0 > 0)$. 则 $h(x)$ 在上 $(0, x_0)$ 递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上递增. 所以 $h(x_0) = \frac{3}{4} + \ln \sqrt{2}$, 且

$$a = 1 + \frac{1}{x_0} - 2x_0. \text{ 代入可得 } \frac{1}{2} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = x_0^2 + \ln x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 故 } a = 1 \text{8 分}$$

(ii) 即 $x_1^2 + x_1 + \frac{1}{4} = \ln x_2 + x_2 = t$, 由 (i) 知 $x_1 < x_2$. 易得 $x_1^2 + \frac{1}{4} - \ln x_2 = x_2 - x_1$

设 $x_2 - x_1 = m$, 则 $(x_2 - m)^2 + \frac{1}{4} - \ln x_2 - m = 0$. 记 $k(x) = (x - m)^2 + \frac{1}{4} - \ln x - m$, 则

$k'(x) = 2x - \frac{1}{x} - 2m$, 易知 $k'(x)$ 是单调函数, 且有唯一零点 $s (s > 0)$, 且 $m = s - \frac{1}{2s}$. 则 $k(x)$ 在 $(0, s)$



上递减, 在 $(s, +\infty)$ 上递增, 所以 $k(s) \leq 0$. 其中 $k(s) = (s-m)^2 - \ln s - m + \frac{1}{4}$, 即

$k(s) = \frac{1}{4s^2} + \frac{1}{2s} - s - \ln s + \frac{1}{4} \leq 0$, 又 $k(s)$ 是关于 s 的减函数且 $k(1) = 1$, 得 $s \geq 1$, 所以 $m \geq \frac{1}{2}$ (当

$m = \frac{1}{2}$ 时, 有 $2x_1 = x_2 = 1$), 所以 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址: www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**浙江官方微信号: **zjgkjzb**。



微信搜一搜

浙考家长帮