TOP20 三月联考(全国Ⅱ卷)

文科数学　　参考答案

本试卷防伪处为：

(3)下列函数中为偶函数

(23)(本小题满分 10 分)

1. B 【解析】$A=\{x|x\geq1\}$，所以 $\complement_U A=\{x|x<1\}$.

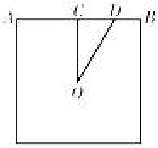
2. A 【解析】$(1-2i)(2+i)=2+i-4i-2i^2=4-3i$.

3. D 【解析】A 选项为非奇非偶函数；B 选项为非奇非偶函数；C 选项为奇函数；D 选项为偶函数，故选 D.

4. A 【解析】由题意可知，双曲线 C 的一条渐近线为 $y=\sqrt{3}x$，则过点 F 作与渐近线垂直的直线方程为 $y=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$，与 $y=-\sqrt{3}x$ 联立得 $x=-1$，$y=\sqrt{3}$，故 $M(-1,\sqrt{3})$，又 $F(2,0)$，则 $|FM|=2\sqrt{3}$.

5. D 【解析】该几何体为圆柱的内部去掉一个圆锥，圆柱的体积为 2π，圆锥的体积为 $\frac{2\pi}{3}$，则该几何体的体积为 $2\pi-\frac{2\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$.

6. D 【解析】如图所示，$CD=\sqrt{OD^2-OC^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2-2^2}=1$，故该点到正方形中心的距离小于 $\sqrt{5}$ 的概率 $P=\frac{2CD}{AB}=\frac{1}{2}$.



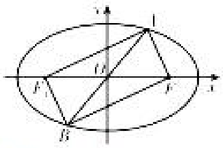
7. C 【解析】由题意可知 $P(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{1}{3})$，根据三角函数的定义 $\sin\angle POA=\frac{1}{3}$，$\cos\angle POA=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则 $\sin\angle BOP=\sin(\frac{3\pi}{4}-\angle POA)=\sin\frac{3\pi}{4}\cos\angle POA-\cos\frac{3\pi}{4}\sin\angle POA=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}-(-\frac{\sqrt{2}}{2})\times\frac{1}{3}=\frac{4+\sqrt{2}}{6}$.

8. D 【解析】程序运行如下：$S=3$，$k=1$；$S=\frac{1}{3}$，$k=2$；$S=\frac{1}{2}$，$k=3$；$S=-2$，$k=4$；$S=3$，$k=5$；…，此程序的 S 值 4 个一循环，输入 a 的值为 2019，则当 $k=2020$ 时跳出循环，$2020=4\times505$，故输出 S 的值为 -2.

9. B 【解析】由 $\sin\alpha\cos\beta=3\sin\beta\cos\alpha$ 得 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{3\sin\beta}{\cos\beta}$，即 $\tan\alpha=3\tan\beta$，则 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3\tan\beta-\tan\beta}{1+3\tan\beta\cdot\tan\beta}=\frac{2\tan\beta}{1+3\tan^2\beta}=\frac{2}{\frac{1}{\tan\beta}+3\tan\beta}\leqslant\frac{2}{2\sqrt{\frac{1}{\tan\beta}\cdot3\tan\beta}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $\frac{1}{\tan\beta}=3\tan\beta$，即 $\tan\beta=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan\alpha=\sqrt{3}$ 时取等号，此时 $\alpha-\beta$ 取最大值 $\frac{\pi}{6}$.

10. B 【解析】结合可行域可知 $a\geq-2$，$\frac{y}{x+4}$ 表示可行域内的点 $P(x,y)$ 与点 $Q(-4,0)$ 连线的斜率，直线 $x+y-2=0$ 与直线 $y=x+a$ 的交点为点 $A(1-\frac{a}{2},1+\frac{a}{2})$，当 $x=1-\frac{a}{2}$，$y=1+\frac{a}{2}$ 时，$\frac{y}{x+4}$ 取到最大值 $\frac{1}{2}$，即 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1+\frac{a}{2}}{1-\frac{a}{2}+4}=\frac{1}{2}$，解得 $a=2$，所以实数 a 的值为 2.

11. A 【解析】因为 $\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=0$，所以 $\angle AFB=90°$，因为 $|AO|=|AF|$，所以 $|AB|=2|AF|$，故 $\angle ABF=30°$，设椭圆 C 的左焦点为 F_1，根据椭圆的性质，四边形 AF_1BF 为平行四边形，且 $\angle AFB=90°$，所以四边形 AF_1BF 为矩形，在直角三角形 AF_1F 中，$\angle AF_1F=30°$，$|AF_1|=\sqrt{3}c$，$|AF|=c$，根据椭圆的定义，$|AF_1|+|AF|=2a$，即 $\sqrt{3}c+c=2a$，则椭圆 C 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{3}-1$.



12. D 【解析】由题意知 $f(x)=a\ln x-e^x(x>0)$，$f'(x)=\frac{a}{x}-e^x$，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减，无极值点；当 $a>0$ 时，根据 $y=\frac{a}{x}$ 与 $y=e^x$ 的图象，设两个函数在第一象限的交点的横坐标为 x_0，当 $x\in(0,x_0)$ 时，$\frac{a}{x}>e^x$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(0,x_0)$ 上单调递增，当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$\frac{a}{x}<e^x$，$f'(x)=\frac{a}{x}-e^x<0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，故当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 有一个极大值点.

13. $-\frac{1}{4}$ 【解析】因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则 $2x\cdot(-2)-y\cdot 1=0$，故 $\frac{x}{y}=-\frac{1}{4}$.

14. 甲 【解析】由丙、丁的说法知道丙与丁中有一个人说的是真话，若丙说了真话，则甲必是假话，矛盾；若丁说了真话，则甲说的是假话，甲就是进过房子的那个人.

15. 36π 【解析】因为 $AB=2BC=4$，$\angle ABC=60°$，所以 $\angle ACB=90°$，则 $\triangle ABC$ 外接圆的半径为 2，球心到底面的距离为 $\sqrt{5}$，则球的半径 $R=\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=3$，则球的体积 $V=\frac{4}{3}\pi\cdot 3^3=36\pi$.

16. 4 【解析】因为 $b+c=a(\cos B+\cos C)$，根据余弦定理可得 $\frac{b+c}{a}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，整理得 $2b^2c+2bc^2=a^2b+bc^2-b^3+a^2c+b^2c-c^3$，即 $b^2c+bc^2=a^2b+a^2c-(b^3+c^3)$，因式分解得 $(b+c)(b^2+c^2-a^2)=0$，所以 $b^2+c^2=a^2$，即 $\angle BAC=90°$，$\triangle ABC$ 的周长 $a+b+c=a+a\sin B+a\cos B=a[1+\sqrt{2}\sin(B+\frac{\pi}{4})]\leqslant a(1+\sqrt{2})=4+4\sqrt{2}$，当 $\angle B=\frac{\pi}{4}$ 时，取等号，则 $a=4$.

17. 【解析】(Ⅰ)因为 $\frac{a_n}{a_{n+1}}=2a_n+1$，

所以 $a_n=a_{n+1}+2a_na_{n+1}$，

即 $a_n-a_{n+1}=2a_na_{n+1}$，等式两边同时除以 a_na_{n+1}，

得 $\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=2(n\geqslant 2)$，且 $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=2$，

所以数列 $\{\frac{1}{a_n}\}$ 为首项为 1，公差为 2 的等差数列.

……………………………………………… 4 分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $\frac{1}{a_n}=2n-1$，$\frac{3^n}{a_n}=(2n-1)3^n$，……

……………………………………………… 6 分

则 $T_n=1\times 3+3\times 3^2+\cdots+(2n-1)3^n$①，

$3T_n=1\times 3^2+\cdots+(2n-3)3^n+(2n-1)3^{n+1}$②，

①−②得：$-2T_n=3+2(3^2+\cdots+3^n)-(2n-1)3^{n+1}=3+2\times\frac{9(1-3^{n-1})}{1-3}-(2n-1)3^{n+1}$

$=2(1-n)3^{n+1}-6$，

故 $T_n=(n-1)3^{n+1}+3$. …………………… 12 分

18. 【解析】(Ⅰ)作 A_1C_1 的中点 F，连接 EF，B_1F.

因为 $EF/\!/AA_1$，$BB_1/\!/AA_1$，

所以 $DB_1/\!/EF$.

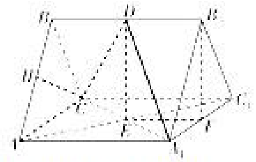
又因为 $EF=DB_1=\frac{1}{2}AA_1$，

所以四边形 $DEFB_1$ 为平行四边形，……… 2 分

则 $DE/\!/B_1F$.

又因为 $B_1F\subseteq$ 平面 $A_1B_1C_1$，$DE\nsubseteq$ 平面 $A_1B_1C_1$，

所以 $DE/\!/$ 平面 $A_1B_1C_1$. …………………… 4 分



(Ⅱ)作 AB 的中点 H，连接 CH，

根据直三棱柱的性质 $CH\perp$ 平面 AA_1B_1B，

$CH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\triangle BDA_1$ 的面积 $S_1=\frac{\sqrt{2}}{4}$，……… 6 分

设点 B 到平面 DCA_1 的距离为 h，

又 $\triangle DCA_1$ 的面积 $S_2=\frac{3}{4}$，

根据 $V_{B-DCA_1}=V_{C-BDA_1}$，

则有 $\frac{1}{3}\times S_2\times h=\frac{1}{3}\times S_1\times CH$，解得 $h=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

综上，点 B 到平面 DCA_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{6}$. … 12 分

19. 【解析】(Ⅰ) $K^2=\frac{300\times(70\times 55-130\times 45)^2}{200\times 100\times 115\times 185}\approx$

2.820， …………………………………… 2分

由于 $2.820>2.706$，所以有 90% 的把握认为学生所学文理与阅读内容有关. ………………… 4分

(Ⅱ)由茎叶图可知 $x=6$，$y=6$，

各组数据的频数分别为 10,16,4，

则 30 名同学日阅读时间的平均值为 $45\times\frac{10}{30}+75\times\frac{16}{30}+105\times\frac{4}{30}=69$.

故这 30 名同学日阅读时间的平均值为 69 分钟.

…………………………………… 8分

(Ⅲ)记"这两人性别相同"为事件 A，日均阅读时间高于 90 分钟的 4 人中，男生 2 人记为 A,B，女生 2 人记为 a,b，

从 4 人中任选 2 人的基本事件有：$\{A,B\},\{A,a\},\{A,b\},\{B,a\},\{B,b\},\{a,b\}$，共 6 个基本事件，事件 A 有 $\{A,B\},\{a,b\}$，共 2 个基本事件，

所以 $P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

故这 2 人性别相同的概率为 $\frac{1}{3}$. ………… 12分

20.【解析】设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}x^2=4y\\ y=kx+1\end{cases}$ 联立得：$x^2-4kx-4=0$，

$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-4$.

(Ⅰ)当 $k=\frac{1}{2}$ 时，$x_1+x_2=2$，$\therefore y_1+y_2=3$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}\cdot\sqrt{2^2-4\times(-4)}=5$，……… 2分

设 AB 的中点为 M，则 $M(1,\frac{3}{2})$，

$\therefore$ 以 AB 为直径的圆被 x 轴所截得的弦长为

$m=2\sqrt{(\frac{5}{2})^2-(\frac{3}{2})^2}=4$. ………………… 4分

(Ⅱ)对 $y=\frac{x^2}{4}$ 求导，得 $y'=\frac{x}{2}$，即 $k_{AE}=\frac{x_1}{2}$，

直线 AE 的方程为 $y-y_1=\frac{x_1}{2}(x-x_1)$，

即 $y=\frac{x_1}{2}x-\frac{1}{4}x_1^2$，

同理，直线 BE 的方程为 $y=\frac{x_2}{2}x-\frac{1}{4}x_2^2$，

设 $E(x_0,y_0)$，联立 AE 与 BE 的方程，

解得 $\begin{cases}x_0=\frac{x_1+x_2}{2}=2k,\\ y_0=\frac{x_1x_2}{4}=-1,\end{cases}$ 即 $E(2k,-1)$，…… 8分

点 E 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|2k^2+2|}{\sqrt{1+k^2}}=2\sqrt{1+k^2}$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(4k)^2+16}=4(k^2+1)$，

所以 $\triangle ABE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times4(k^2+1)\times2\sqrt{1+k^2}=4(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\geq4$，

当且仅当 $k=0$ 时取等号，

综上，$\triangle ABE$ 面积的最小值为 4. ………… 12分

21.【解析】(Ⅰ)$f'(x)=2x\ln x+x=x(2\ln x+1)$，

令 $f'(x)=0$，即 $2\ln x+1=0$，得 $x=e^{-\frac{1}{2}}$，

因为 $y=2\ln x+1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则当 $0<x<e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

当 $x>e^{-\frac{1}{2}}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

所以 $f(x)$ 在区间 $(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 上单调递减，在区间 $(e^{-\frac{1}{2}},+\infty)$ 上单调递增. ……………………… 4分

(Ⅱ)由(Ⅰ)可知，$f(x)$ 的最小值为 $f(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2e}$，令 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{3}{4}$，

则 $g'(x)=\frac{x(2-x)}{e^x}$， ……………………… 6分

当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，

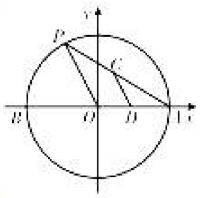
则函数 $g(x)$ 的最大值 $g(x)_{max}=g(2)=\frac{4}{e^2}-\frac{3}{4}$，

$\frac{4}{e^2}-\frac{3}{4}-(-\frac{1}{2e})=\frac{(8-3e)(2+e)}{4e^2}<0$， … 10分

因此 $x^2\ln x\geq-\frac{1}{2e}>\frac{4}{e^2}-\frac{3}{4}\geq\frac{x^2}{e^x}-\frac{3}{4}$，

即 $x^2\ln x>\frac{x^2}{e^x}-\frac{3}{4}$，则原不等式得证. …… 12分

22.【解析】(Ⅰ)如图，设 AP 的中点为 C，OA 的中点为 D，



$|DC|=\frac{1}{2}|OP|=1$，

所以点 C 的轨迹是以 $D(1,0)$ 为圆心，1 为半径的圆，

其轨迹 C_2 的直角坐标方程为：$x^2+y^2-2x=0$.

……………………………………………… 5分

(Ⅱ)把$\begin{cases}x=-2+t\cos\alpha\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$代入$x^2+y^2-2x=0$,

整理得$t^2-6\cos\alpha t+8=0$,$B(-2,0)$,

设点M,N所对应的参数分别为t_1,t_2,

$t_1+t_2=6\cos\alpha$①,$t_1t_2=8$②,

因为$S_{\triangle BMO}=2S_{\triangle NMO}$,则$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MN}$,

即$t_2=\dfrac{3}{2}t_1$③. ………………………………… 8分

联立①②③得$\cos^2\alpha=\dfrac{25}{27}$,$\sin^2\alpha=\dfrac{2}{27}$,

故$\tan^2\alpha=\dfrac{2}{25}$,所以$\tan\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{5}$. ………… 10分

23.【解析】(Ⅰ)若$a=1$,则不等式$f(x)\geqslant 1$化为$|x-1|-x^2\geqslant 1$,

当$x\geqslant 1$时,$x-1-x^2\geqslant 1$,即$x^2-x+2\leqslant 0$,无解;

当$x<1$时,$1-x-x^2\geqslant 1$,

即$x^2+x\leqslant 0$,解得$-1\leqslant x\leqslant 0$,

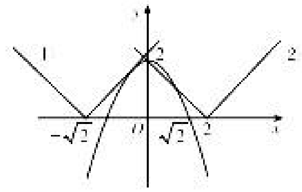
综上,不等式$f(x)\geqslant 1$的解集为$\{x|-1\leqslant x\leqslant 0\}$.

……………………………………………… 5分

(Ⅱ)$f(x)<2(1-x^2)$,即$|x-a|-x^2<2(1-x^2)$,化为$|x-a|<2-x^2$,

设$g(x)=|x-a|$,$h(x)=2-x^2$,

当$a<0$时,$g(x)$的图象如折线①所示,



由$\begin{cases}y=x-a\\ y=2-x^2\end{cases}$得$x^2+x-a-2=0$,

若相切,则$\Delta=1+4(a+2)=0$,得$a=-\dfrac{9}{4}$,

数形结合知,当$a\leqslant -\dfrac{9}{4}$时,不等式无负数解,

则$-\dfrac{9}{4}<a<0$,

当$a=0$时,满足$f(x)<2(1-x^2)$至少有一个负数解,

当$a>0$时,$g(x)$的图象如折线②所示,

此时当$a=2$时恰好无负数解,

当$a\geqslant 2$时,不等式无负数解,则$0<a<2$,

综上所述,实数a的取值范围是$\left(-\dfrac{9}{4},2\right)$. ……

……………………………………………… 10分

自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国强基计划、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

识别二维码，快速关注

温馨提示：

全国重点中学 2020 届高三上学期期末考试试题答案汇总（更新下载中），点击链接获得

http://www.zizzs.com/c/202001/41635.html