湖北省高中名校联盟2024届高三第一次联合测评

数　学

命题单位：襄阳四中数学学科组　　　　审题单位：圆创教育研究中心　襄阳市第五中学

本试卷共4页，22题。满分150分。考试用时120分钟。　　**考试时间：2023年8月16日下午15:00—17:00**

★祝考试顺利★

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用签字笔或钢笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $M=\{x|x^2-x-2\leqslant 0\}$，$N=\{x|y=\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x}\}$，则 $M\cup N=$（　　）

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[-2,1]$　　D. $[-1,2]$

2. 已知复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=1+\mathrm{i}$，则 $z=$（　　）

A. $-\mathrm{i}$　　B. i　　C. $1-\mathrm{i}$　　D. $1+\mathrm{i}$

3. 从长度为2，4，6，8，10的5条线段中任取3条，则这3条线段能构成一个三角形的概率是（　　）

A. $\frac{3}{10}$　　B. $\frac{3}{5}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{1}{3}$

4. 设命题 p：若数列 $\{a_n\}$ 是公差不为0的等差数列，则点 $P(n,a_n)$ 必在一次函数图象上；命题 q：若正项数列 $\{a_n\}$ 是公比不为1的等比数列，则点 $Q(n,a_n)$ 必在指数函数图象上. 下列说法正确的是（　　）

A. p、q 均为真命题　　B. p、q 均为假命题

C. p 真 q 假　　D. p 假 q 真

5. 某人从 A 地到 B 地，乘火车、轮船、飞机的概率分别为0.3，0.3，0.4，乘火车迟到的概率为0.2，乘轮船迟到的概率为0.3，乘飞机迟到的概率为0.4，则这个人从 A 地到 B 地迟到的概率是（　　）

A. 0.16　　B. 0.31　　C. 0.4　　D. 0.32

6. 已知把物体放在空气中冷却时，若物体原来的温度是 θ_1 ℃，空气的温度是 θ_0 ℃，则 t min后物体的温度 θ ℃满足公式 $\theta=\theta_0+(\theta_1-\theta_0)\mathrm{e}^{-kt}$（其中 k 是一个随着物体与空气的接触状况而定的正常数）. 某天小明同学将温度是80 ℃的牛奶放在20 ℃空气中，冷却2 min后牛奶的温度是50 ℃，则下列说法正确的是（　　）

A. $k=\ln 2$　　B. $k=2\ln 2$

C. 牛奶的温度降至35 ℃还需4 min　　D. 牛奶的温度降至35 ℃还需2 min

7. 已知 F_1，F_2 分别是椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左，右焦点，M，N 是椭圆 C 上两点，且 $\overrightarrow{MF_1}=2\overrightarrow{F_1N}$，$\overrightarrow{MF_2}\cdot\overrightarrow{MN}=0$，则椭圆 C 的离心率为(　　)

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{5}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

8. 记 $a=\sqrt[2023]{2022}$，$b=\sqrt[2023]{2023}$，$c=\sqrt[2024]{2023}$，则 a,b,c 的大小关系是(　　)

A. $a>b>c$　　B. $a>c>b$　　C. $b>c>a$　　D. $b>a>c$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 已知一组样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n(n\geqslant4)$ 均为正数，且 $x_1<x_2<\cdots<x_n$，若由 $y_k=2x_k-1(k=1,2,\cdots,n)$ 生成一组新的数据 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，则这组新数据与原数据的(　　)可能相等.

A. 极差　　B. 平均数

C. 中位数　　D. 标准差

10. 已知 O 为抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的顶点，直线 l 交抛物线于 M,N 两点，过点 M,N 分别向准线 $x=-\frac{p}{2}$ 作垂线，垂足分别为 P,Q，则下列说法正确的是(　　)

A. 若直线 l 过焦点 F，则 N,O,P 三点不共线

B. 若直线 l 过焦点 F，则 $PF\perp QF$

C. 若直线 l 过焦点 F，则抛物线 C 在 M,N 处的两条切线的交点在某定直线上

D. 若 $OM\perp ON$，则直线 l 恒过点 $(2p,0)$

11. 已知正四面体 $P-ABC$ 的棱长为 2，下列说法正确的是(　　)

A. 正四面体 $P-ABC$ 的外接球表面积为 6π

B. 正四面体 $P-ABC$ 内任意一点到四个面的距离之和为定值

C. 正四面体 $P-ABC$ 的相邻两个面所成二面角的正弦值为 $\frac{1}{3}$

D. 正四面体 $Q-MNG$ 在正四面体 $P-ABC$ 的内部，且可以任意转动，则正四面体 $Q-MNG$ 的体积最大值为 $\frac{2\sqrt{2}}{81}$

12. 若 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，且对任意 $x_1,x_2\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2)$，则下列说法正确的是(　　)

A. $f(1)$ 一定为正数

B. 2 是 $f(x)$ 的一个周期

C. 若 $f(1)=1$，则 $f\left(\frac{2023}{4}\right)=1$

D. 若 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上单调递增，则 $f(1)\neq\frac{1}{2024}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. $(x-2y)^5(x+y)$的展开式中 x^3y^3 的系数是________.

14. 已知 Rt△ABC 的两条直角边分别为 3,4，以斜边所在直线为轴，其余各边旋转一周形成的曲面围成的几何体体积是________.

15. 小王准备在单位附近的某小区买房，若小王看中的高层住宅总共有 n 层($20\leqslant n\leqslant 30, n\in \mathbf{N}^*$)，设第 1 层的"环境满意度"为 1，且第 k 层($2\leqslant k\leqslant n, k\in \mathbf{N}^*$)比第 $k-1$ 层的"环境满意度"多出 $3k^2-3k+1$；又已知小王有"恐高症"，设第 1 层的"高层恐惧度"为 1，且第 k 层($2\leqslant k\leqslant n, k\in \mathbf{N}^*$)比第 $k-1$ 层的"高层恐惧度"高出 $\frac{1}{3}$ 倍. 在上述条件下，若第 k 层"环境满意度"与"高层恐惧度"分别为 a_k，b_k，记小王对第 k 层"购买满意度"为 c_k，且 $c_k=\frac{a_k}{b_k}$，则小王最想买第________层住宅.

(参考公式及数据：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$，$\ln 2\approx 0.6931$，$\ln 3\approx 1.0986$，$\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\approx 1.1006$)

16. 已知⊙O_1：$x^2+(y-2)^2=1$，⊙O_2：$(x-3)^2+(y-6)^2=9$，过 x 轴上一点 P 分别作两圆的切线，切点分别是 M，N，当 $|PM|+|PN|$ 取到最小值时，点 P 坐标为________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知函数 $f(x)=\log_2\frac{m\cdot 4^x+1}{2^x}(m\in \mathbf{R})$.

(Ⅰ)若函数 $f(x)$是偶函数，求实数 m 的值；

(Ⅱ)若 $\exists x_0\in[0,1]$，使得 $f(x_0)=x_0$ 成立，求实数 m 的取值范围.

18. (12 分)

西梅以"梅"为名，实际上不是梅子，而是李子，中文正规名叫"欧洲李"，素有"奇迹水果"的美誉. 因此，每批西梅进入市场之前，会对其进行检测，现随机抽取了 10 箱西梅，其中有 4 箱测定为一等品.

(Ⅰ)现从这 10 箱中任取 3 箱，求恰好有 1 箱是一等品的概率；

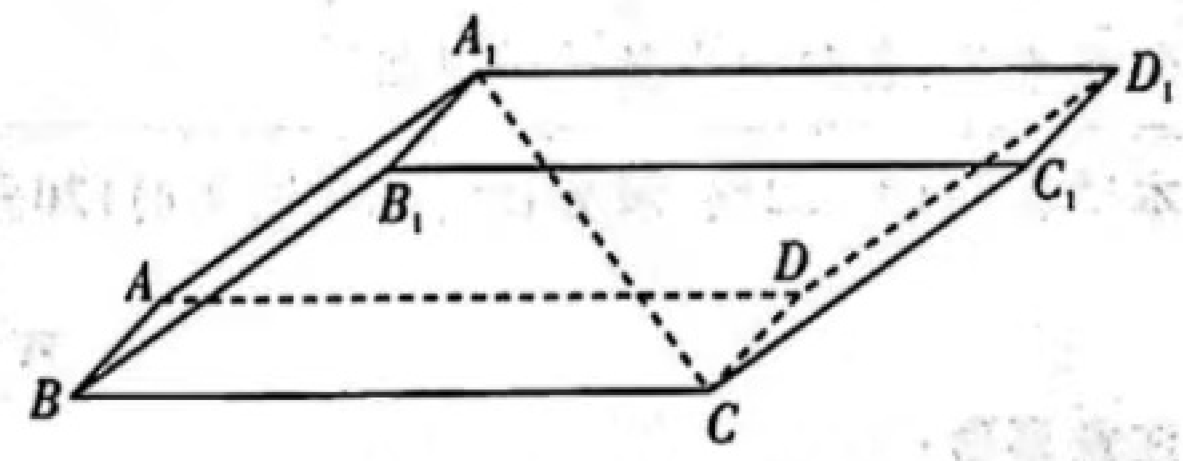
(Ⅱ)以这 10 箱的检测结果来估计这一批西梅的情况，若从这一批西梅中随机抽取 3 箱，记 ξ 表示抽到一等品的箱数，求 ξ 的分布列和期望.

19. (12 分)

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，底面 $ABCD$ 和侧面 ABB_1A_1 均为矩形，$AB=2$，$BC=6$，$BB_1=2\sqrt{3}$，$A_1C=4$.

(Ⅰ)求证：$A_1D\perp DC$；

(Ⅱ)求 AC_1 与平面 BAA_1B_1 所成角的正弦值.



20. (12 分)

已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1>0$，$a_{n+1}=\begin{cases}\log_2 a_n, & n\text{ 为奇数},\\ 2^{a_n+2}, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$

(Ⅰ)判断数列$\{a_{2n-1}\}$是否是等比数列？若是，给出证明；否则，请说明理由；

(Ⅱ)若数列$\{a_n\}$的前 10 项和为 361，记 $b_n=\dfrac{1}{(\log_2 a_{2n+1})\cdot a_{2n+2}}$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 T_n，

求证：$T_n<\dfrac{7}{16}$.

21. (12 分)

已知双曲线$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}=1$与直线 $l:y=kx+m\left(k\neq\pm\dfrac{3}{2}\right)$有唯一的公共点 M.

(Ⅰ)若点 $N(2,9)$在直线 l 上，求直线 l 的方程；

(Ⅱ)过点 M 且与直线 l 垂直的直线分别交 x 轴于 $A(x_1,0)$，y 轴于 $B(0,y_1)$两点. 是否存在定点 G，H，使得 M 在双曲线上运动时，动点 $P(x_1,y_1)$使得$||PG|-|PH||$为定值.

22. (12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x$.

(Ⅰ)讨论 $f(x)$的单调性；

(Ⅱ)若两个不相等的正实数 a，b 满足 $f(a)=f(b)$，求证：$a+b<1$；

(Ⅲ)若$\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，求证：$f(\cos\alpha)<f(\sin\alpha)$.