

姓名 \_\_\_\_\_  
准考证号 \_\_\_\_\_

## 2023 年普通高等学校招生考试模拟试题 数学(一)

本试卷共 4 页, 22 题。全卷满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项:

1. 答题前, 先将自己的姓名、考号等填写在试题卷和答题卡上, 并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2. 选择题的作答: 每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3. 填空题和解答题的作答: 用签字笔直接写在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4. 考试结束后, 请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题: 本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

- 若  $\bar{z} = \frac{2i(4+i)}{1-i}$ , 则复数  $z$  的虚部为  
A.  $-3i$                       B.  $-3$                       C.  $3$                       D.  $5$
- 已知集合  $M = \{x | 3x - x^2 \geq 0\}$ ,  $N = \{x | (x-a)^2 \leq 4\}$ , 若  $(\complement_{\mathbf{R}}M) \cup N = \mathbf{R}$ , 则实数  $a$  的取值范围为  
A.  $[1, 2]$                       B.  $(1, 2)$   
C.  $(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$                       D.  $(-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$
- 若  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}$ , 则  $\frac{\tan \alpha - 1}{\sin \alpha} =$   
A.  $-\frac{12}{5}$                       B.  $\frac{6}{5}$                       C.  $\frac{12}{5}$                       D.  $\frac{5}{12}$
- 古印度数学家婆什迦罗在《莉拉沃蒂》一书中提出如下问题: 某人给一个人布施, 初日 4 德拉玛(古印度货币单位), 其后日增 5 德拉玛. 朋友啊, 请马上告诉我, 半个月中, 他总共布施多少德拉玛? 在这个问题中, 这人 15 天的最后 7 天布施的德拉玛总数为  
A. 133                      B. 308                      C. 413                      D. 427
- 在平行四边形  $ABCD$  中,  $AC$  与  $BD$  交于点  $O$ , 点  $E$  是线段  $AB$  上靠近点  $A$  的三等分点, 点  $F$  为线段  $OE$  的中点. 设  $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$ ,  $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$ , 则  $\overrightarrow{AF} =$   
A.  $\frac{5}{12}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$                       B.  $\frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{5}{12}\mathbf{b}$                       C.  $\frac{5}{6}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$                       D.  $\frac{5}{12}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$
- 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  的一个焦点为  $F$ , 点  $P, Q$  是  $C$  上关于原点对称的两点, 则  $|PF|^2 + 6|QF|$  的取值范围为  
A.  $[2, 26]$                       B.  $[51, 52]$                       C.  $[51, 76]$                       D.  $[52, 76]$
- 将函数  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$  的图象向右平移  $a$  个单位长度( $a$  为常数, 且  $0 < a < 2$ ), 得到函数  $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图象, 若  $f(x)$  在区间  $(m, n)$  ( $0 < m < n < \pi$ ) 上单调递增,  $g(x)$  在区间  $(m, n)$  上单调递减, 则  $\frac{an}{\pi} - m$  的最大值为  
A.  $-\frac{\pi}{8}$                       B.  $-\frac{\pi}{4}$                       C.  $\frac{\pi}{24}$                       D.  $\frac{5\pi}{12}$



三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知圆锥的高为 3,若圆锥的表面积是底面积的 3 倍,则该圆锥的体积为\_\_\_\_\_.
14. 定义:点  $P$  为曲线  $\Gamma$  外的一点, $A, B$  为曲线  $\Gamma$  上的两个动点,当  $\angle APB$  取最大值时, $\angle APB$  为点  $P$  对曲线  $\Gamma$  的张角. 已知点  $P$  为直线  $l: x+y-3=0$  上的动点, $A, B$  为圆  $O: x^2+y^2=1$  上的两个动点,设点  $P$  对圆  $O$  的张角为  $\theta$ ,则  $\sin \frac{\theta}{2}$  的最大值为\_\_\_\_\_.
15. 十四届全国人大一次会议于 2023 年 3 月 5 日在北京召开. 会议期间,会议筹备组将包含甲、乙在内的 5 名工作人员分配到 3 个会议厅负责进场引导工作,每个会议厅至少 1 人,每人只负责一个会议厅,则甲、乙两人不分配到同一个会议厅的不同安排方法共有\_\_\_\_\_种.(用数字作答)
16. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ ,过点  $F_1$  作倾斜角为  $30^\circ$  的直线  $l$  与  $C$  的左、右两支分别交于点  $P, Q$ ,若  $\left[ \frac{\vec{F_2P}}{|\vec{F_2P}|} + \frac{\vec{F_2Q}}{|\vec{F_2Q}|} \right] \cdot (\vec{F_2P} - \vec{F_2Q}) = 0$ ,则  $C$  的离心率为\_\_\_\_\_.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 微信公众号“高中试卷君”最新押题卷联考卷

17. (本小题满分 10 分)

已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ ,  $a_1 = 3$ , 且  $\frac{S_n + S_{n+1} + 3}{a_{n+1}} = 2$ ,

(1) 证明:数列  $\{a_n\}$  为等比数列,并求其通项公式;

(2) 若 \_\_\_\_\_, 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

从①  $b_n = na_n$ ; ②  $b_n = \frac{2n+3}{(n^2+n)a_{n+1}}$ ; ③  $b_n = (-1)^{n-1} a_n a_{n+1}$ , 这三个条件中任

选一个补充在上面的横线上并解答问题.

注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

已知锐角  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ,  $\triangle ABC$  外接圆的半径为  $\sqrt{3}$ , 且  $\frac{b \sin C}{\sin A + \sin B - \sin C} = a - b + c$ .

(1) 求  $A$  及  $a$  的值;

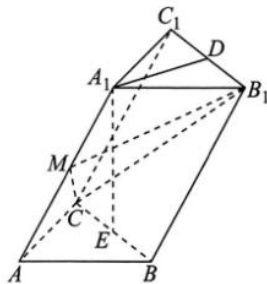
(2) 若  $\vec{BC} = 2\vec{BP}$ , 求线段  $AP$  长度的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中,  $\triangle ABC$  是以  $BC$  为斜边的等腰直角三角形,点  $D$  为棱  $B_1C_1$  的中点,棱  $AA_1$  上的点  $M$  满足  $A_1D \parallel$  平面  $B_1CM$ ,  $AA_1 = 2AC = 4$ .

(1) 求线段  $AM$  的长;

(2) 若点  $E$  为棱  $BC$  的中点,且  $A_1E \perp$  平面  $ABC$ , 求直线  $B_1M$  与平面  $BCC_1B_1$  所成角的正弦值.





20. (本小题满分 12 分)

直播带货是扶贫助农的一种新模式,这种模式是利用主流媒体的公信力,聚合销售主播的力量助力打通农产品产销链条,切实助力农民增收.我国南方某蜜桔种植县通过网络平台直播销售蜜桔,其中每箱蜜桔重 5 千克,单价为 40 元/箱,已知最近 5 天单日直播总时长  $x$ (即所有主播的直播时长之和,单位:小时)与蜜桔的单日销售量  $y$ (单位:百箱)之间的统计数据如下表:

直播总时长 $x$	8	9	11	12	15
单日销售量 $y$	67	63	80	80	85

可用线性回归模型拟合  $y$  与  $x$  之间的关系.

(1) 试求变量  $y$  与  $x$  的经验回归方程  $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ ;

(2) 若每位主播每天直播的时间不超过 4 小时,要使每天直播带货销售蜜桔的总金额超过 60 万元,则至少要请几位主播进行直播?

(3) 直播带货大大提升销量的同时,也增加了坏果赔付的成本.该蜜桔平均每箱按 80 个计算,若客户在收到货时有坏果,则每个坏果要赔付 1 元.现有甲、乙两款包装箱,若采用甲款包装箱,成本为  $t$  ( $1 \leq t \leq 5$ ) 元/箱,且每箱坏果的

个数  $X$  服从  $P(X=i) = \begin{cases} \frac{1}{32}, & i=0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^i, & i=1,2,3,4,5 \\ 0, & i=6, \dots, 80 \end{cases}$ ; 若采用乙款包装箱,成本为  $\frac{3}{2}t$

元/箱,且每箱坏果的个数  $Y$  服从  $P(Y=i) = \begin{cases} \frac{9}{16}, & i=0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^i m, & i=1,2,3 \\ 0, & i=4,5, \dots, 80 \end{cases}$ . 请运用概率统

计的相关知识分析,选择哪款包装箱获得的利润更大?

$$\text{附: } \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}. \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 4218, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 635.$$

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = mx^2 - e^x$ ,  $f'(x)$  为  $f(x)$  的导函数.

(1) 讨论  $f'(x)$  的单调性;

(2) 当  $x > 0$  时,若  $\frac{f(x)}{x} \leq m \ln x$  恒成立,求实数  $m$  的取值范围.

22. (本小题满分 12 分) 微信公众号“高中试卷君”最新押题卷联考卷

已知抛物线  $C: y^2 = 2x$  的焦点为  $F$ , 其准线  $l$  与  $x$  轴交于点  $P$ , 过点  $P$  的直线与  $C$  交于  $A, B$  两点(点  $A$  在点  $B$  的左侧).

(1) 若点  $A$  是线段  $PB$  的中点,求点  $A$  的坐标;

(2) 若直线  $AF$  与  $C$  交于点  $D$ , 记  $\triangle BDP$  内切圆的半径为  $r$ , 求  $r$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

