一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\in N|2^x\leqslant 16\}$，$B=\{x|x^2-12<0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$　　B. $(-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$

C. $\{1,2,3\}$　　D. $\{0,1,2,3\}$

2. 已知复数 $z=a+bi$，其中 a,b 为实数，且满足 $(2+a)(1-2i)=5-5bi$，则 z 的虚部为

A. $-2i$　　B. $2i$　　C. -2　　D. 2

3. 体育强国的建设是 2035 年我国发展的总体目标之一. 某学校安排每天一小时课外活动时间，现统计得小明同学 10 周的课外体育运动时间（单位：小时）：6.5，6.3，7.8，9.2，5.7，7.9，8.1，7.2，5.8，8.3，则下列说法不正确的是

A. 小明同学 10 周的课外体育运动时间平均每天不少于 1 小时

B. 小明同学 10 周的课外体育运动时间的中位数为 6.8

C. 以这 10 周数据估计小明同学一周课外体育运动时间大于 8 小时的概率为 0.3

D. 若这组数据同时增加 0.5，则增加后的 10 个数据的极差、标准差与原数据的极差、标准差相比均无变化

4. 在一间长、宽、高分别为 7 米、5 米、4 米的长方体形房间内，距离角落的八个顶点一米范围内的区域为“危险区域”，房间内其他区域为“安全区域”，一只苍蝇在房间内飞行到任意位置是随机的，则某时刻这只苍蝇位于“危险区域”的概率为

A. $\frac{\pi}{140}$　　B. $\frac{\pi}{35}$　　C. $\frac{\pi}{105}$　　D. $\frac{1}{140}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，其前 n 项和为 S_n，$a_1+S_3=4$，$a_2+a_3+a_4+a_5=7$，则 S_9 等于

A. 63　　B. $\frac{63}{2}$　　C. 45　　D. $\frac{45}{2}$

6. 已知 α,β 是两个不同的平面，m,n 是两条不同的直线，则下列命题中正确的是

A. 若 $\alpha\perp\beta$，$m\perp\alpha$，$m\perp n$，则 $n\perp\beta$　　B. 若 $\alpha/\!/\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m/\!/n$

C. 若 $m\perp n$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$　　D. 若 $m\perp\alpha$，$m/\!/n$，$n/\!/\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

7. 古代中国的太极八卦图是以同圆内的圆心为界，画出形状相同的两个阴阳鱼，阳鱼的头部有个阴眼，阴鱼的头部有个阳眼，表示万物都在相互转化，互相渗透，阴中有阳，阳中有阴，阴阳相合，相生相克，蕴含现代哲学中的矛盾对立统一规律. 由八卦模型图可抽象得到正八边形，从该正八边形的 8 个顶点中任意取出 4 个构成四边形，其中梯形的个数为

A. 8　　B. 16

C. 24　　D. 32

8. 已知直线 $l:3x+4y-11=0$ 与椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{m^2}=1$ 交于 A,B 两点，若点 $P(1,2)$ 恰为弦 AB 的中点，则椭圆 C 的离心率是

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

9. 数列 $\{a_n\}$ 是首项和公比均为 2 的等比数列，S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则使不等式 $\frac{2}{S_1S_2}+\frac{2^2}{S_2S_3}+\cdots+\frac{2^n}{S_nS_{n+1}}<\frac{2^n}{2\,023}$ 成立的最小正整数 n 的值是

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

10. $f(x)$ 为定义在 R 上的偶函数，对任意的 $x_2>x_1\geq 0$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>2$，且 $f(2)=4$，则不等式 $f(x)>2|x|$ 的解集为

A. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　B. $(2,+\infty)$

C. $(0,2)$　　D. $(-\infty,2)$

11. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$，$y=f(x+\frac{\pi}{4})$ 是偶函数，且 $f(-\frac{\pi}{4}-x)+f(-\frac{\pi}{4}+x)=0$，$f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{4})$ 上单调，则 ω 的最大值为

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. $\frac{36}{7}$

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，$f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$\sin 2x-f'(x)>0$，且 $\forall x\in \mathbf{R}$，$f(-x)+f(x)-2\sin^2x=0$，则下列说法一定正确的是

A. $f(\frac{\pi}{3})-f(\frac{\pi}{6})>\frac{1}{2}$　　B. $f(\frac{\pi}{3})-f(\frac{\pi}{4})<\frac{1}{4}$

C. $f(\frac{\pi}{3})-f(\frac{3\pi}{4})<\frac{1}{4}$　　D. $f(\frac{\pi}{3})-f(-\frac{3\pi}{4})>\frac{1}{4}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 向量 a,b 的夹角为 θ，定义运算"$\otimes$"：$a\otimes b=|a||b|\sin\theta$，若 $a=(\sqrt{3},1)$，$b=(-\sqrt{3},1)$，则 $a\otimes b$ 的值为______.

14. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\geq 0,\\3x-y-3\leq 0,\\x+y-1\geq 0,\end{cases}$ 则 $x+y$ 的最大值为______.

15. 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，M 为 AB 的中点，过点 M 的平面 α 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球的截面面积的最小值为______.

16. 已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线 l 与 x 轴的交点为 M，过焦点 F 的直线 AB 分别与抛物线交于 A,B 两点（A 点在第一象限），$|AF|\cdot|BF|=|AB|$，直线 AB 的倾斜角为锐角 α，且满足 $\sin\angle AMF=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$，则 $|AB|=$______.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：共 60 分．

17．（12 分）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，$6\cos B\cos C-1=3\cos(B-C)$．

（1）若 $B=\dfrac{\pi}{6}$，求 $\cos C$；

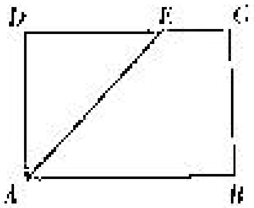
（2）若 $c=3$，点 D 在 BC 边上，且 AD 平分 $\angle BAC$，$AD=\dfrac{8\sqrt{3}}{7}$，求△ABC 的面积．

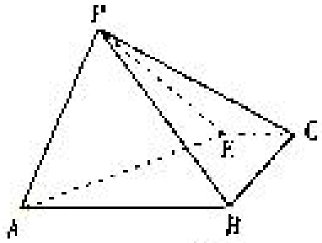
18．（12 分）某车间购置了三台机器，这种机器每年需要一定次数的维修，现统计了 100 台这种机器一年内维修的次数，其中每年维修 2 次的有 40 台，每年维修 3 次的有 60 台．用 X 代表这三台机器每年共需要维修的次数．

（1）以频率估计概率，求 X 的分布列与数学期望；

（2）维修厂家有 A、B 两家，假设每次仅维修一台机器，其中 A 厂家单次维修费用是 550 元，B 厂家对同一车间的维修情况进行记录，前 5 次维修费用是每次 600 元，后续维修费用每次递减 100 元．从每年的维修费用的期望角度来看，选择哪家厂家维修更加节省？

19．（12 分）如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 在边 CD 上，且满足 $AD=DE=\sqrt{2}$，$CE=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，将△ADE 沿 AE 向上翻折，使点 D 到点 P 的位置，构成四棱锥 $P-ABCE$．





(1)若点 F 在线段 AP 上,且 EF//平面 PBC,试确定点 F 的位置;

(2)若 $PB=\frac{\sqrt{410}}{10}$,求锐二面角 $P-EC-A$ 的大小.

20. (12 分)已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $\sqrt{2}x-y=0$，且双曲线经过点 $A(2,2)$.

(1)求双曲线 C 的方程；

(2)过点 $B(1,0)$ 且斜率不为 0 的直线与 C 交于 M,N 两点(与点 A 不重合)，直线 AM,AN 分别与直线 $x=1$ 交于点 P,Q，求 $\frac{|PB|}{|QB|}$ 的值.

21. (12 分)已知函数 $f(x)=\frac{x}{e^{ax}}+\ln x-ax-1$，其中 e 为自然对数的底数.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)若函数 $f(x)$ 有两个零点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$x_1 \cdot x_2>e^2$.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. [选修 4－4：坐标系与参数方程](10 分)

在直角坐标系中，圆 C 是以 $(2,2)$ 为圆心，$\sqrt{3}$ 为半径的圆，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\theta,\\y=t\sin\theta\end{cases}$ (t 为参数，$0\leq\theta<\pi$)，以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系.

(1)写出圆 C 的极坐标方程；

(2)已知直线 l 与圆 C 相交于 M,N 两点，且 $|OM|^2+|ON|^2=14$，求角 θ.

23. [选修 4－5：不等式选讲](10 分)

已知 $f(x)=|x|+a|x-2|$.

(1)若 $a=3$，求不等式 $f(x)\leq10$ 的解集；

(2)若关于 x 的不等式 $f(x)\leq2|x|+|2x-2|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，求实数 a 的最大值

参考答案

普高联考 2022—2023 学年高三测评(六)

理科数学

1. D 【解析】由题知 $A=\{0,1,2,3,4\}$，满足 $x^2-12<0$ 的元素只有 0，1，2，3，故选 D.

2. D 【解析】$(2+a)(1-2i)=(2+a)-(4+2a)i=5-5bi$，则 $\begin{cases}2+a=5,\\4+2a=5b,\end{cases}$ 故 $a=3$，$b=2$，则复数 $z=3+2i$ 的虚部为 2. 故选 D.

3. B 【解析】这 10 周数据的平均值为 7.28，平均每天 1.04 小时，故 A 正确；将 10 个数据从小到大排列为 5.7，5.8，6.3，6.5，7.2，7.8，7.9，8.1，8.3，9.2，中位数为 $\frac{7.2+7.8}{2}=7.5$，故 B 错误；10 个数据中大于 8 的有 3 个，估计小明同学一周课外体育运动时间大于 8 小时的概率为 0.3，故 C 正确；根据极差和标准差的定义，D 正确. 故选 B.

4. C 【解析】房间的体积是 140 立方米，八个"危险区域"所占空间是半径为 1 米的球的体积，即 $\frac{4}{3}\pi$ 立方米，则某时刻这只苍蝇位于"危险区域"的概率为 $\frac{\frac{4}{3}\pi}{140}=\frac{\pi}{105}$，故选 C.

5. D 【解析】$a_2+S_3=4a_2=4$，则 $a_2=1$，$a_2+a_5+a_4+a_6=2(a_3+a_5)=7$，则 $a_5=\frac{5}{2}$，所以 $S_9=9a_5=\frac{45}{2}$. 故选 D.

6. D 【解析】对于 A，可能会出现 $n//\beta$，$n\subset\beta$，或 n 与 β 相交但不垂直的情况，所以 A 不正确；对于 B，m，n 可能是异面直线，所以 B 不正确；对于 C，α，β 可能平行或相交但不垂直，所以 C 不正确；对于 D，在平面 β 内可找到一条直线垂直于平面 α，根据面面垂直的判定定理可知 D 正确，故选 D.

7. C 【解析】梯形的上、下底平行且不相等，如图，若以 AB 为底边，则可构成 2 个梯形，根据对称性可知此类梯形有 16 个，若以 AC 为底边，则可构成 1 个梯形，此类梯形共有 8 个，所以梯形的个数是 24，故选 C.

8. A 【解析】由题意可知直线 l 的斜率为 $-\frac{3}{4}$，设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{m^2}=1$，$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{m^2}=1$，两式相减得 $\frac{x_1^2-x_2^2}{4}=-\frac{y_1^2-y_2^2}{m^2}$，所以 $\frac{m^2}{4}=-\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\times\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{1}=\frac{3}{2}$，得 $m^2=6$，

则 $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，所以离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 A.

9. B 【解析】由已知可得 $a_n=2^n$，则 $S_n=2^{n+1}-2$，所以 $\frac{2^n}{S_nS_{n+1}}=\frac{1}{4}(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1})$，则 $\frac{2}{S_1S_2}+\frac{2^2}{S_2S_3}+$

$\cdots+\frac{2^n}{S_nS_{n+1}}=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{2^{n+1}-1})<\frac{2^n}{2\ 023}$，代入计算，可得当不等式成立时 n 的最小值为 9. 故选 B.

10. A 【解析】对任意的 $x_2>x_1\geqslant 0$，都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>2$，则 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-2=\frac{[f(x_2)-2x_2]-[f(x_1)-2x_1]}{x_2-x_1}>0$，即 $y=f(x)-2|x|$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，$f(2)-2\times|2|=0$. 因为 $f(x)$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，所以 $y=f(x)-2|x|$ 为偶函数. $f(x)>2|x|$ 即 $f(x)-2|x|>0$，所以 $f(x)>2|x|$ 的解集为 $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$，故选 A.

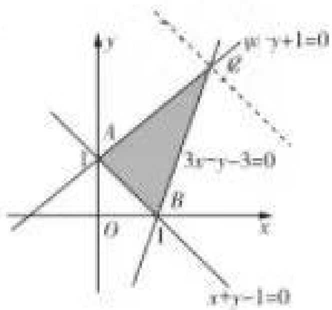
11. C 【解析】因为 $f(-\frac{\pi}{4}-x)+f(-\frac{\pi}{4}+x)=0$，所以 $f(-\frac{\pi}{4})=0$，则 $-\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=m\pi,m\in\mathbf{Z}$ ①. 因为 $y=f(x+\frac{\pi}{4})$ 是偶函数，所以直线 $x=\frac{\pi}{4}$ 是 $f(x)$ 图象的对称轴，

$f(x)$在$(\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{4})$上单调，$f(x)$的最小正周期为$\frac{2\pi}{\omega}$，所以$\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{18}\leqslant\frac{\pi}{\omega}$，解得$\omega\leqslant\frac{36}{7}$，故$\omega$的最大值为5，经检验$f(x)$在$(\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{4})$上单调，故选C.

12. B 【解析】令$F(x)=\sin^2x-f(x)$，则$F'(x)=\sin 2x-f'(x)$. 因为当$x\in[0,+\infty)$时，$\sin 2x-f'(x)>0$，所以$F'(x)>0$，所以$F(x)=\sin^2x-f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增. 又$\forall x\in\mathbf{R}$，$f(-x)+f(x)-2\sin^2x=0$，所以$F(-x)=\sin^2(-x)-f(-x)=\sin^2(-x)-2\sin^2x+f(x)=-\sin^2x+f(x)=-F(x)$，所以$F(x)$为奇函数，所以$F(x)=\sin^2x-f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，所以$F(\frac{\pi}{3})>F(\frac{\pi}{4})$，即$\frac{3}{4}-f(\frac{\pi}{3})>\frac{1}{2}-f(\frac{\pi}{4})$，故选B.

13. $2\sqrt{3}$ 【解析】因为$\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$\boldsymbol{b}=(-\sqrt{3},1)$，所以$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{2}$，则$\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以$\boldsymbol{a}\otimes\boldsymbol{b}=2\sqrt{3}$.

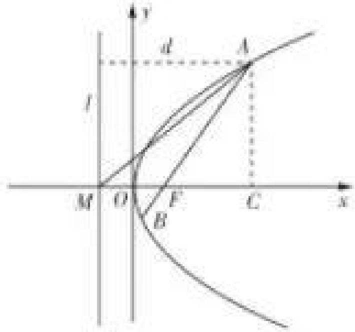
14. 5 【解析】不等式组表示的可行域如图所示，为$\triangle ABC$及其内部的阴影区域，且$A(0,1)$，$B(1,0)$，$C(2,3)$，令$z=x+y$，则$y=-x+z$，当直线$y=-x+z$经过点C时，z取得最大值5.



15. π 【解析】正方体的外接球球心O为体对角线AC_1的中点，连接OM，过点M且与OM垂直的平面截得外接球的小圆面积是最小的，因为OM与AB垂直，且A，B两点都在外接球的表面上，所以最小的截面面积是以AB为直径的圆的面积，故为π.

16. 12 【解析】如图，过点A作$AC\perp x$轴于点C，由抛物线的定义可知点A到准线l的距离$d=|AF|=$

参考答案 第2页(共6页)



$|MC|=|MF|+|FC|=p+|AF|\cos\alpha$，故$|AF|=\dfrac{p}{1-\cos\alpha}$，同理$|BF|=\dfrac{p}{1+\cos\alpha}$，则$|AF||BF|=\dfrac{p^2}{1-\cos^2\alpha}=|AF|+|BF|=\dfrac{2p}{1-\cos^2\alpha}$，故$p=2$，

$\sin\alpha=\dfrac{AC}{AF}=\dfrac{AC}{MC}=\tan\angle AMF$，则$\sin\angle AMF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan\angle AMF$，

可得$\cos\angle AMF=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则$\sin\angle AMF=\dfrac{1}{2}$，所以$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}=12$.

17. (1) $6\cos B\cos C-1=3\cos(B-C)=3\cos B\cos C+3\sin B\sin C$，

则$3\cos B\cos C-3\sin B\sin C=3\cos(B+C)=1$，……………………………… 3 分

又$A+B+C=\pi$，则$\cos A=-\dfrac{1}{3}$，$\sin A=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，……………………………… 4 分

则$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}$ ……………………………… 6 分

(2) 由(1)知$\cos A=-\dfrac{1}{3}$，则$\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，……………………………… 7 分

由$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADC}+S_{\triangle ADB}$得$\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}b\cdot AD\sin\dfrac{A}{2}+\dfrac{1}{2}c\cdot AD\sin\dfrac{A}{2}$，……………………………… 9 分

则$6b\cos\dfrac{A}{2}=(3+b)AD$，即$2\sqrt{3}b=(3+b)\cdot\dfrac{8\sqrt{3}}{7}$，解得$b=4$，……………………………… 11 分

所以$\triangle ABC$的面积$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times3\times4\times\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=4\sqrt{2}$. ……………………………… 12 分

18. (1) 以频率估计概率，一台机器每年需要维修 2 次的概率为$\dfrac{2}{5}$，需要维修 3 次的概率为$\dfrac{3}{5}$，

设Y为这三台机器每年单个需要维修三次的台数，………………………

$P(X=8)=P(Y=2)=C_3^2\times\frac{2}{5}\times(\frac{3}{5})^2=\frac{54}{125}$，$P(X=9)=P(Y=3)=(\frac{3}{5})^3=\frac{27}{125}$. ………… 5 分

所以 X 的分布列为

X	6	7	8	9
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

则 $E(X)=E(Y)+6=3\times\frac{3}{5}+6=\frac{39}{5}$. ………………………………………… 7 分

(2)选择 A 厂家每年维修费用的期望为$\frac{39}{5}\times 550=4\ 290$(元)，……………… 8 分

选择 B 厂家每年维修费用的期望为 $3\ 500\times\frac{8}{125}+3\ 900\times\frac{36}{125}+4\ 200\times\frac{54}{125}+4\ 400\times\frac{27}{125}=4\ 112$(元)，

因为 $4\ 112<4\ 290$，所以选择 B 厂家更加节省. ……………… 12 分

19. (1)点 F 为线段 AP 上靠近点 P 的三等分点，证明如下：

如图，过点 F 作 $FG/\!/AB$ 交 PB 于点 G，连接 CG，则$\frac{FG}{AB}=\frac{1}{3}$，

又$\frac{CE}{AB}=\frac{1}{3}$，所以 $FG=CE=\frac{1}{3}AB$.

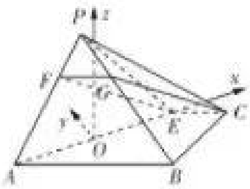
因为 $CE/\!/AB$，所以 $CE/\!/FG$，

所以四边形 $FGCE$ 为平行四边形，……………… 4 分

所以 $EF/\!/CG$，又 $EF\not\subset$ 平面 PBC，$CG\subset$ 平面 PBC，

所以 $EF/\!/$平面 PBC. ……………… 5 分

(2)取 AE 的中点 O，建立如图所示的空间直角坐标系，



设 $P(0,m,n)$，$E(1,0,0)$，$C(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0)$，$B(\frac{1}{2},-\frac{3}{2},0)$，

则$\overrightarrow{OP}=(0,m,n)$，$\overrightarrow{PB}=(\frac{1}{2},-\frac{3}{2}-m,-n)$，

因为 $OP=1$，$PB=\frac{\sqrt{410}}{10}$，所以$\begin{cases}m^2+n^2=1,\\(\frac{1}{2})^2+(m+\frac{3}{2})^2+n^2=\frac{41}{10},\end{cases}$解得 $m=\frac{1}{5}$，……………… 7 分

故 $P(0,\frac{1}{5},\frac{2\sqrt{6}}{5})$，$\overrightarrow{PE}=(1,-\frac{1}{5},-\frac{2\sqrt{6}}{5})$，$\overrightarrow{EC}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0)$，

设平面 PEC 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{PE}\cdot\boldsymbol{m}=x_1-\frac{1}{5}y_1-\frac{2\sqrt{6}}{5}z_1=0,\\\overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{m}=\frac{1}{2}x_1-\frac{1}{2}y_1=0,\end{cases}$ 不妨取 $x_1=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,1,\frac{\sqrt{6}}{3})$，……………… 9 分

设平面 ECA 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(0,0,1)$，则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{2}$，……………… 11 分

则锐二面角 $P-EC-A$ 的大小为$\frac{\pi}{3}$. ……………… 12 分

20. (1)由题意可知 $\frac{4}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1$，$\frac{b}{a}=\sqrt{2}$，解得 $a=\sqrt{2}$，$b=2$，

所以双曲线的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$. ……………… 4 分

(2)设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，代入$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{4}=1$中，

可得$(2m^2-1)y^2+4my-2=0$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

则 $2m^2-1\neq0$，$\Delta=32m^2-8>0$，$y_1+y_2=\frac{-4m}{2m^2-1}$，$y_1y_2=\frac{-2}{2m^2-1}$. ………………………… 6 分

直线 AM 的方程为 $y=\frac{y_1-2}{x_1-2}(x-2)+2$，

令 $x=1$，得点 P 的纵坐标为 $y_P=\frac{2-y_1}{x_1-2}+2$. ………………………… 7 分

直线 AN 的方程为 $y=\frac{y_2-2}{x_2-2}(x-2)+2$，令 $x=1$，得点 Q 的纵坐标为 $y_Q=\frac{2-y_2}{x_2-2}+2$. ………… 8 分

因为$\frac{2-y_1}{x_1-2}+\frac{2-y_2}{x_2-2}=\frac{-2my_1y_2+(2m+1)(y_1+y_2)-4}{(my_1-1)(my_2-1)}=\frac{\frac{-16m^2+4}{2m^2-1}}{\frac{4m^2-1}{2m^2-1}}=-4$，………………… 10 分

所以 $y_P+y_Q=0$，即 $\frac{|PB|}{|BQ|}=1$. ………………………… 12 分

24. (1)$f(x)=e^{\ln x-ax}+(\ln x-ax)-1$，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

令 $m=\ln x-ax$，则 $y=e^m+m-1$ 单调递增. ………………………… 1 分

令 $u(x)=\ln x-ax$，则 $u'(x)=\frac{1}{x}-a$，

①当 $a\leqslant0$ 时，$u'(x)>0$，$\therefore u(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增. … 2 分

②当 $a>0$ 时，令 $u'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$，

若 $x\in(0,\frac{1}{a})$，则 $u'(x)>0$，$u(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递增，$\therefore f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递增；

若 $x\in(\frac{1}{a},+\infty)$，则 $u'(x)<0$，$u(x)$在$[\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减，$\therefore f(x)$在$[\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减.

………………………………………………………… 4 分

综上，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递增，在$[\frac{1}{a},+\infty)$上单调递减. ………………… 5 分

(2)$\because y=e^m+m$ 单调递增，$\therefore$ 若函数$f(x)$有两个零点，则 $u(x_1)=u(x_2)=0$，

即 $\ln x_1=ax_1$，$\ln x_2=ax_2$，$\therefore a=\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}$，………………………… 7 分

要证 $x_1\cdot x_2>e^2$，只要证 $\ln x_1+\ln x_2>2$，即 $a(x_1+x_2)>2$，

只要证$\frac{\ln x_2-\ln x_1}{x_2-x_1}>\frac{2}{x_1+x_2}$，即证 $\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$（其中 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$），………………… 9 分

令 $g(t)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1}$，则 $g'(t)=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}$，

当 $t>1$ 时，$g'(t)>0$，$\therefore g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，……………………………………………… 11 分

当 $t>1$ 时，$g(t)>g(1)=0$，即 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}$ 成立，故原不等式 $x_1\cdot x_2>e^2$ 成立．………… 12 分

22.（1）由题意知圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=3$，即 $x^2+y^2-4x-4y+5=0$，

则圆 C 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\alpha-4\rho\sin\alpha+5=0$．………………………………………… 3 分

（2）由题知直线 l 的极坐标方程为 $\alpha=\theta(\rho\in\mathbf{R})$，设 $M(\rho_1,\theta)$，$N(\rho_2,\theta)$，

联立 $\begin{cases}\rho^2-4\rho\cos\alpha-4\rho\sin\alpha+5=0,\\ \alpha=\theta,\end{cases}$ 可得 $\rho^2-(4\cos\theta+4\sin\theta)\rho+5=0$，………………………… 5 分

且 $\Delta=(4\cos\theta+4\sin\theta)^2-20>0$，即 $\sin 2\theta>\dfrac{1}{4}$，………………………………………………… 6 分

又 $\rho_1+\rho_2=4\cos\theta+4\sin\theta$，$\rho_1\rho_2=5$，

则 $|OM|^2+|ON|^2=\rho_1^2+\rho_2^2=(\rho_1+\rho_2)^2-2\rho_1\rho_2=(4\cos\theta+4\sin\theta)^2-10=6+16\sin 2\theta=14$，

所以 $\sin 2\theta=\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{4}$，又 $0\leqslant\theta<\pi$，则 $2\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $2\theta=\dfrac{5\pi}{6}$，所以 $\theta=\dfrac{\pi}{12}$ 或 $\theta=\dfrac{5\pi}{12}$．………………… 10 分

23.（1）若 $a=3$，则不等式 $f(x)\leqslant10$ 可化为 $|x|+3|x-2|\leqslant10$．

当 $x<0$ 时，$-x-3(x-2)\leqslant10$，即 $x\geqslant-1$，所以 $-1\leqslant x<0$；

当 $0\leqslant x<2$ 时，$x-3(x-2)\leqslant10$，即 $x\geqslant-2$，所以 $0\leqslant x<2$；

当 $x\geqslant2$ 时，$x+3(x-2)\leqslant10$，即 $x\leqslant4$，所以 $2\leqslant x\leqslant4$．

综上所述，原不等式的解集为 $[-1,4]$．…………………………………………………………………… 5 分

（2）由题知 $f(x)\leqslant2|x|+|2x-2|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

即 $|x|+a|x-2|\leqslant2|x|+|2x-2|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

即 $a|x-2|\leqslant|x|+|2x-2|$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

当 $x=2$ 时，$0\leqslant4$，即无论 a 取何值，不等式恒成立，

当 $x\neq2$ 时，$|x-2|>0$，则 $a\leqslant\dfrac{|x|+|2x-2|}{|x-2|}$ 恒成立，设 $g(x)=\dfrac{|x|+|2x-2|}{|x-2|}$，

又 $|x|+|2x-2|\geqslant|(2x-2)-x|=|x-2|$，当且仅当 $(2x-2)x\leqslant0$，即 $0\leqslant x\leqslant1$ 时取等号，所以 $g(x)\geqslant1$，则 $a\leqslant1$，

所以实数 a 的最大值为 1．……………………………………………………………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。