绝密★启用前

2021年普通高等学校招生全国统一考试(样卷一)

数学文科

本试卷共23题，共150分，考试时间120分钟，考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内.
2. 选择题必须使用2B铅笔填涂；非选择题必须使用0.5毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整，笔迹清楚.
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效.
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
5. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱. 不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{x\mid 1<x<3\}$，$B\subseteq \mathbf{N}^*$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，则下列结论中一定正确的是

A. $1\in A$　　B. $2\in B$　　C. $B=\{2\}$　　D. $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=\varnothing$

2. 设复数 z 满足 $(1-2i)z=4+2i$，则 $z=$

A. $3i$　　B. $-3i$　　C. $2i$　　D. $-2i$

3. 为达成"碳达峰、碳中和"的目标，我们需坚持绿色低碳可持续发展道路，可再生能源将会有一个快速发展的阶段. 太阳能是一种可再生能源，光伏是太阳能光伏发电系统的简称，主要有分布式与集中式两种方式. 下面的图表是近年来中国光伏市场发展情况表，则下列结论中正确的是

A. 2013～2020年，年光伏新增装机规模同比(与上年相比)增幅逐年递减

B. 2013～2020年，年光伏发电量与年份成负相关

C. 2013～2020年，年新增装机规模中，分布式的平均值大于集中式的平均值

D. 2013～2020年，每年光伏发电量占全国发电总量的比重与年份成正相关

4. 已知 α 为第四象限角，$\cos 2\alpha=-\dfrac{1}{3}$，则 $\sin\alpha=$

A. $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $-\dfrac{2}{3}$

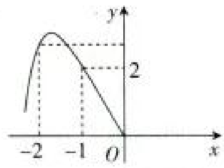
5. 设向量 $\boldsymbol{a}=(1,\sqrt{3})$，$\boldsymbol{b}=(m,1)$，若 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，则实数 $m=$

A. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. 已知 F_1,F_2 是椭圆 $E:\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 的左、右焦点，P 是 E 上在第一象限内一点，F_1 关于直线 PF_2 的对称点为 A，F_2 关于直线 PF_1 的对称点为 B，则 $|AB|$ 的最大值为

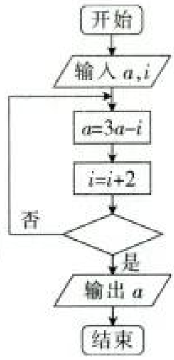
A. $4\sqrt{2}$　　B. 5　　C. $\frac{9}{2}$　　D. 4

7. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示，$f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，则



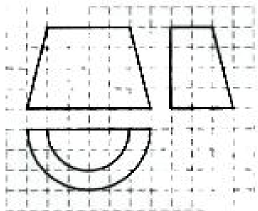
A. $f(2)=-1$
B. $f(1)\cdot f(2)<4$
C. $f'(1)\cdot f'(2)<0$
D. 方程 $f'(x)=0$ 无解

8. 执行右边的程序框图，若输入 $a=1$，$i=1$，输出 $a=10$，则在空白框中可以填入



A. $i>18$
B. $i>19$
C. $i>20$
D. $i>21$

9. 如图，网格纸上的小正方形的边长为1，粗实线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积为



A. $\frac{19\pi}{2}$　　B. $\frac{38\pi}{3}$　　C. 19π　　D. 38π

10. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的焦距为 $2c$，A 是 C 的右顶点，在 C 的一条渐近线上存在 M,N 两点，使得 $|AM|=|AN|=c$，且 $\angle MAN=120^\circ$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{5}$

11. 已知函数 $f(x)=|\sin(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3})|+|\cos(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3})|$，现有下列四个结论：

①函数 $f(x)$ 的一个周期为 $\frac{3\pi}{2}$；

②函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$ 上单调递增；

③直线 $x=-\frac{5\pi}{4}$ 是函数 $f(x)$ 图象的一条对称轴；

④函数 $f(x)$ 的值域为 $[1,\sqrt{2}]$.

所有正确结论的序号是

A. ①②④　　B. ①③　　C. ①③④　　D. ②④

12. 已知 $2^a=\ln b=e^c=\log_2 d$，则

A. $\log_2(b-d)>e^{a-c}$　　B. $e^{a+b}>e^{c+d}$

C. $\ln|a-c|<2^{b-d}(a\neq c)$　　D. $(\frac{1}{2})^{b+c}<(\frac{1}{2})^{a+d}$

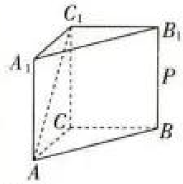
二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 设函数 $f(x)=\begin{cases}-2x-m, x<0,\\ x^2-1, x\geq 0,\end{cases}$ 若 $f(f(-2))=8$,则实数 $m=$________.

14. 在$\triangle ABC$中,$BC=2$,$\angle ABC=\frac{\pi}{6}$,$\triangle ABC$的面积为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$,则 $AC=$________.

15. 已知圆 C:$x^2+y^2-6x-4\sqrt{7}y+21=0$,过点 $P(m,0)$作圆 C 的切线,切点分别为 A,B,若点 C 始终在以线段 AB 为直径的圆外,则实数 m 的取值范围为________.

16. 2020 年底,中国科学家成功构建了 76 个光子的量子计算机"九章",推动全球量子计算的前沿研究达到一个新高度. 该量子计算机取名"九章",是为了纪念中国古代著名的数学专著《九章算术》. 在《九章算术》中,底面是直角三角形的直三棱柱被称为"堑堵". 如图,棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为一"堑堵",P 是 BB_1 的中点,$AA_1=AC=BC=2$,则在过点 P 且与 AC_1 平行的截面中,当截面图形为等腰梯形时,该截面的面积等于________,该"堑堵"的外接球的表面积为________.(第一空 3 分,第二空 2 分)



三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17~21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17.(12 分)

设 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和,已知 $3a_{n+1}=a_n$,且 $S_4=\frac{40}{81}$,数列$\{b_n\}$是等差数列,且 $a_1b_2=a_2b_5=1$.

(1)求$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2)设 $c_n=a_n\cdot b_n$,求$\{c_n\}$的前 n 项和 T_n.

18.(12 分)

"中国科学十大进展"遴选活动由科学技术部高技术研究发展中心牵头举办,旨在激励广大科技工作者的科学热情和奉献精神,开展基础研究科学普及,促进公众理解、关心和支持基础研究,在全社会营造良好的科学氛围. 2021 年 2 月,科技部高技术研究发展中心(基础研究管理中心)发布了 2020 年度中国科学十大进展. 某校为调查本校中学生对 2020 年度中国科学十大进展的了解与关注情况,从该校高中年级在校生中,按高一、高二年级,高三年级分成两个年级段,随机抽取了 200 名学生进行调查,其中高一、高二年级共调查了 120 人,高三年级调查了 80 人,以说出 10 项科学进展的名称个数为标准,统计情况如下. 假设以能至少说出四项科学进展的名称为成绩优秀.

说出科学进展名称个数	0	1	2	3	4	5 个及以上
频数(高一、高二年级)	5	25	30	30	25	5
频数(高三年级)	0	10	15	25	20	10

(1)根据频数分布表完成 2×2 列联表,并回答是否有 95%的把握认为成绩优秀与否与年级分段有关?

	成绩不优秀	成绩优秀	合计
高一、高二年级			
高三年级			
合计			

(2)按分层抽样的方法,在被调查且成绩优秀的学生中抽取 6 名同学,再在这 6 名同学中随

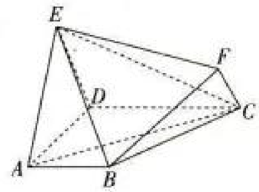
机抽取 4 名同学组成“2020 科技展”宣讲队，求至少有 2 名高三年级的同学入选宣讲队的概率.

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.10	0.05	0.010	0.005
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879

19.（12 分）

如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 和 $CDEF$ 均为直角梯形，$AB/\!/CD$，$CF/\!/DE$，且 $\angle CDE=\angle CDA=\dfrac{\pi}{2}$，$CD=AD=DE=AE=2AB=2CF=4$.



（1）证明：$BF/\!/$平面 ACE.

（2）求点 F 到平面 ACE 的距离.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{\ln x}{x}$，$a\in\mathbf{R}$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(\mathrm{e},f(\mathrm{e}))$ 处的切线方程；

（2）证明：当 $a\geqslant\dfrac{1}{2\mathrm{e}}$ 时，$f(x)\geqslant 0$.

21.（12 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，点 $P(t,-2)$ 在 C 上，且 $|PF|=2|OF|$（O 为坐标原点）.

（1）求 C 的方程；

（2）若 A,B 是 C 上的两个动点，且 A,B 两点的横坐标之和为 8.

（ⅰ）设线段 AB 的中垂线为 l，证明：l 恒过定点.

（ⅱ）设（ⅰ）中定点为 D，当 $|AB|$ 取最大值，且 P,D 位于直线 AB 两侧时，求四边形 $PADB$ 的面积.

（二）选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.［选修 4—4：坐标系与参数方程］（10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2+t^2\\ y=2t^4+1\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，倾斜角为 α 的直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin(\alpha-\theta)=2\sqrt{3}\sin(\alpha-\dfrac{\pi}{6})$.

（1）若 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，求 l 与 C 的交点的极坐标（$\rho\geqslant 0,0\leqslant\theta<2\pi$）；

（2）若 $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，设 M 是 C 上的动点，求 M 到 l 的距离的最小值.

23.［选修 4—5：不等式选讲］（10 分）

设 a,b,c 为非零实数，且 $a^2+b^2+c^2=3$，证明：

（1）$|a+b+c|\leqslant 3$；

（2）$\dfrac{a^4}{b^2+c^2}+\dfrac{b^4}{a^2+c^2}+\dfrac{c^4}{a^2+b^2}\geqslant\dfrac{3}{2}$.

2021年普通高等学校招生全国统一考试(样卷一)

数学文科参考答案

1. B　本题考查集合的关系与运算. 由题意知 $2\in B$.

2. D　本题考查复数的概念与运算. $z=\frac{4+2i}{1-2i}=2i$, 故 $\bar{z}=-2i$.

3. D　本题考查统计图表. 根据图表可知, 2013～2020年, 每年光伏发电量占全国发电总量的比重随年份逐年增加, D项正确.

4. B　本题考查倍角公式. 因为 $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=-\frac{1}{3}$, 又 α 为第四象限角, 所以 $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5. A　本题考查平面向量的数量积. $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}=\frac{m+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{1+m^2}}$, 解得 $m=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. D　本题考查椭圆的定义. 由题意知 $|PF_1|=|PA|$, $|PF_2|=|PB|$, $|AB|\leqslant|PA|+|PB|=4$, 当且仅当 A, P, B 三点共线时取"=".

7. C　本题考查函数与导数. 由图知 $f(-1)=2$, $f(-2)>2$, 存在 $x_0\in(-2,-1)$, 使得 $f'(x_0)=0$, 且 $f'(-1)<0$, $f'(-2)>0$, 函数 $f(x)$ 是奇函数, 所以 A, B, D 项不正确.

8. A　本题考查程序框图. 运行程序框图, $a=2$, $i=3$; $a=3$, $i=5$; $a=4$, $i=7$; …; $a=9$, $i=17$; $a=10$, $i=19$, 因为输出 $a=10$, 所以空白框中可以填入 $i>18$.

9. B　本题考查三视图与几何体体积. 根据三视图可知该几何体为一圆台的一半, 对应圆台的上底面半径 $r=2$, 下底面半径 $R=3$, 高 $h=4$, 则该几何体的体积 $V=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}(2^2+2\times3+3^2)\times4=\frac{38\pi}{3}$.

10. A　本题考查双曲线的几何性质. 设渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x$, 则点 A 到渐近线的距离 $d=\frac{ab}{c}$. 又 $\angle MAN=120^\circ$, $|AM|=|AN|=c$, 则 $\frac{ab}{c}=\frac{c}{2}$, 即有 $2ab=c^2=a^2+b^2$, 所以 $a=b$, $e=\sqrt{2}$.

11. C　本题考查三角函数的图象与性质. $f(x-\frac{3\pi}{2})=|\sin(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})|+|\cos(\frac{1}{3}x+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3})|=$

$|\cos(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3})|+|\sin(\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3})|=f(x)$, ①正确;

因为 $f(0)=f(\frac{\pi}{2})$, 所以②不正确;

令 $t=\frac{1}{3}x-\frac{\pi}{3}$, 当 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, 即 $x\in[\pi,\frac{5\pi}{2}]$ 时,

$y=\sin t+\cos t=\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})\in[1,\sqrt{2}]$, 由①知 $\frac{3\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期,

所以 $f(x)\in[1,\sqrt{2}]$, $f(-\frac{5\pi}{4})=|\sin(-\frac{3\pi}{4})|+|\cos(-\frac{3\pi}{4})|=\sqrt{2}$, 所以③④正确.

12. D　本题考查指对函数的图象与性质. 因为 $2^a>0$, 所以 $b>d>1$.

若 $b=e$, $d=2$, $a=c=0$, 则 $\log_2(b-d)<0<e^{a-c}$, A项不正确;

当 $a\geqslant0$ 时, $a\geqslant c$, $b>d$, 则 $a+b>c+d$, 当 $a<0$ 时, $a<c<0$, $b>d$, 不等式不一定成立, B项不正确;

当 $b-d\to0$ 时, $c=a\cdot\ln 2$, $c-a=a(\ln 2-1)$, 当 $a<\frac{e}{\ln 2-1}$ 时, 存在 $|a-c|>e$, 所以C项不正确;

当 $a<0$ 时, $a<c<0$, $b>d$, 则 $b-d>a-c$,

当 $a\geqslant0$ 时, 由指对函数的变化趋势, 知 $b-d>a-c$, 即 $b+c>a+d$ 恒成立, D项正确.

13. 1或16　本题考查分段函数求值. $f(-2)=4-m$, 若 $4-m\geqslant0$, 则 $4-m=3$, 解得 $m=1$;

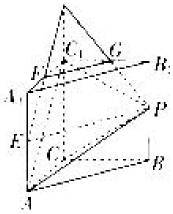
若 $4-m<0$, 则 $m-8=8$, 解得 $m=16$.

14. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　本题考查解三角形。因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$BC=2$，

所以 $AB=\frac{4\sqrt{3}}{3}$，由余弦定理得 $AC^2=4+\frac{16}{3}-2\times2\times\frac{4\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{4}{3}$，所以 $AC=\frac{2\sqrt{3}}{3}$。

15. $(1,5)$　本题考查直线与圆、点与圆的位置关系。由题意知 $\angle ACB<\frac{\pi}{2}$，因为 P、A、C、B 四点共圆，所以可得 $\angle APB>\frac{\pi}{2}$，即 $|AC|>|PA|$，圆 $C:(x-3)^2+(y-2\sqrt{7})^2=16$，圆心 $C(3,2\sqrt{7})$，半径 $|AC|=4$，$|PC|=\sqrt{(m-3)^2+(0-2\sqrt{7})^2}$，$|PA|=\sqrt{|PC|^2-|AC|^2}$，所以 $|PC|^2<2|AC|^2=32$，解得 $1<m<5$。

16. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$　12π　本题考查线面关系。如图，取 E、F、G 分别为其对应边的中点，易知四边形 $PEFG$ 是等腰梯形，当 E 不是 AA_1 的中点时，PE 不平行平面 $A_1B_1C_1$，则四边形不是等腰梯形，等腰梯形有且仅有一个，$S_{PEFG}=\frac{1}{2}\times(\sqrt{2}+2\sqrt{2})\times\frac{\sqrt{6}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，将三棱柱补成正方体，则外接球的半径 $R=\sqrt{3}$，表面积为 $4\pi R^2=12\pi$。



17. 解：本题考查等差、等比数列的通项公式与错位相减法。

(1)因为 $3a_{n+1}=a_n$，且 $S_4=\frac{40}{81}$，所以 $a_n\neq0$，且 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{3}$，所以数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，且公比 $q=\frac{1}{3}$，所以 S_4

$=\frac{a_1[1-(\frac{1}{3})^4]}{1-\frac{1}{3}}=\frac{40}{81}$，解得 $a_1=\frac{1}{3}$。

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{3})^{n-1}=(\frac{1}{3})^n$。

因为 $a_1b_2=a_2b_5=1$，所以 $b_2=3$，$b_5=9$，则在等差数列 $\{b_n\}$ 中，公差 $d=\frac{b_5-b_2}{3}=2$，

所以 $b_n=b_2+(n-2)d=2n-1$。……………………………………………………………… 6分

(2) $c_n=a_nb_n=(\frac{1}{3})^n\cdot(2n-1)$，

则 $T_n=1\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3^2}+5\times\frac{1}{3^3}+\cdots+(2n-1)\times\frac{1}{3^n}$，

上式两边同时乘 $\frac{1}{3}$，可得 $\frac{1}{3}T_n=1\times\frac{1}{3^2}+3\times\frac{1}{3^3}+5\times\frac{1}{3^4}+\cdots+(2n-1)\times\frac{1}{3^{n+1}}$，

两式相减得 $\frac{2}{3}T_n=\frac{1}{3}+2\times(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^n})-(2n-1)\times\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}-(2n+2)\cdot\frac{1}{3^{n+1}}$，

得 $T_n=1-\frac{n+1}{3^n}$。…………………………………………………………………… 12分

18. 解：本题考查独立性检验与古典概型。

(1)由题意，2×2 列联表如下：

	成绩不优秀	成绩优秀	合计
高一、高二年级	90	30	120
高三年级	50	30	80
合计	140	60	200

$K^2=\frac{200(90\times30-30\times50)^2}{120\times80\times140\times60}=\frac{25}{7}\approx3.571<3.841$，所以没有 95% 的把握认为成绩优秀与否与年级分段有关。………………………………………………………………………………………… 6分

(2)被调查且成绩优秀的学生有 60 名，分层抽样抽取 6 名同学，则从高一、高二年级抽取了 3 名同学，记为

a,b,c.从高三年级抽取了3名同学,记为A,B,C,在6名同学中随机选4名,不同的情况有15种:(以下均只列出两名没入选的情况)$(a,b),(a,c),(a,A),(a,B),(a,C),(b,c),(b,A),(b,B),(b,C),(c,A),(c,B),(c,C),(A,B),(A,C),(B,C)$,其中至少有2名高二年级的同学入选的情况的对立事件是只有1名高三年级的同学入选,不同的情况有3种:$(A,B),(A,C),(B,C)$,

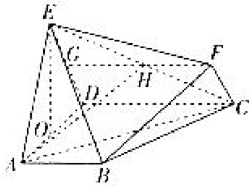
所以至少有2名高二年级的同学入选宣讲队的概率为$1-\frac{3}{15}=\frac{4}{5}$. ………………………… 12分

19. 解:本题考查线面平行关系与点到平面的距离.

(1)取DE中点G,连接FG交CE于点H,连接AH.

$\because CF/\!/DG$,且$DG=CF$,$\therefore$四边形$CDGF$是平行四边形,$\therefore GF/\!/DC$,H为GF的中点,又$\because AB/\!/CD$,且$CD=2AB$,$\therefore AB/\!/HF$,且$AB=HF$,$\therefore$四边形$ABFH$是平行四边形,$\therefore BF/\!/AH$.又$\because BF\not\subset$平面ACE,$AH\subset$平面ACE,$\therefore BF/\!/$平面ACE. ………………………… 6分

(2)$\because BF/\!/$平面ACE,$\therefore$点F到平面ACE的距离等于点B到平面ACE的距离.



取AD中点O,连接OE,$\because DE=AE$,$\therefore OE\perp AD$.$\because \angle CDE=\angle CDA=\frac{\pi}{2}$,

$\therefore CD\perp AD$,$CD\perp DE$,$DE\cap AD=D$,$\therefore CD\perp$平面ADE,

$\therefore CD\perp OE$,$\therefore OE\perp$平面$ABCD$.

$\because DE=AE=AD=4$,$\therefore OE=2\sqrt{3}$.

$\because CD=AD=2AB=4$,$\therefore S_{\triangle ABC}=4$,

$\because CE=AC=4\sqrt{2}$,$AE=4$,$\therefore S_{\triangle ACE}=4\sqrt{7}$.

设点B到平面ACE的距离为h,

$\because V_{E-ABC}=V_{B-ACE}$,即$\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot OE=\frac{1}{3}S_{\triangle ACE}\cdot h$,$\therefore h=\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

即点F到平面ACE的距离为$\frac{2\sqrt{21}}{7}$. ………………………… 12分

20. 解:本题考查导数的综合应用.

(1)当$a=1$时,$f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$,$f'(x)=1-\frac{1-\ln x}{x^2}$,

$f'(e)=1$,$f(e)=e-\frac{1}{e}$,

则曲线$y=f(x)$在点$(e,f(e))$处的切线方程为$x-y-\frac{1}{e}=0$. ………………………… 5分

(2)当$a\geq\frac{1}{2e}$时,$f(x)\geq\frac{1}{2e}x-\frac{\ln x}{x}$.

设$g(x)=\frac{1}{2e}x-\frac{\ln x}{x}$,$g'(x)=\frac{\frac{1}{2e}x^2-\ln x-1}{x^2}$.

设$h(x)=\frac{1}{2e}x^2+\ln x-1$,知其在$(0,+\infty)$上单调递增,且$h(\sqrt{e})=0$,

当$0<x<\sqrt{e}$时,$g'(x)<0$;当$x>\sqrt{e}$时,$g'(x)>0$.

所以函数$g(x)$在$(0,\sqrt{e})$上单调递减,在$(\sqrt{e},+\infty)$上单调递增,$g(x)\geq g(\sqrt{e})=0$,即$f(x)\geq 0$. …… 12分

21. 解:本题考查抛物线的定义及直线与抛物线的位置关系.

(1)由题意得$\begin{cases}t+\frac{p}{2}=2\times\frac{p}{2}\\4=2pt\end{cases}$,解得$\begin{cases}p=2\\t=1\end{cases}$,

所以C的标准方程为$y^2=4x$. ………………………… 4分

(2)设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,且$x_1+x_2=8$.

(i)设AB中点为$E(m,n)$,则$m=\frac{x_1+x_2}{2}=4$,$n=\frac{y_1+y_2}{2}$,

当 $x_1=x_2$ 时，$l:y=0$；当 $x_1\neq x_2$ 时，$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4(y_2-y_1)}{y_2^2-y_1^2}=\frac{4}{y_2+y_1}=\frac{2}{n}$，

则 $k_l=-\frac{n}{2}$，$l:y-n=-\frac{n}{2}(x-4)$，令 $y=0$，得 $x=6$，l 恒过定点 $(6,0)$. ……………………………… 8分

(ⅱ)由(ⅰ)知直线 $AB:y-n=\frac{2}{n}(x-4)$，即 $x=\frac{n}{2}(y-n)+4$，

联立方程消去 x，整理得 $y^2-2ny+2n^2-16=0$，由 $\Delta>0$，得 $n^2<16$，$y_1+y_2=2n$，$y_1y_2=2n^2-16$，$|AB|=\sqrt{1+(\frac{n}{2})^2}|y_1-y_2|=\sqrt{(n^2+4)(16-n^2)}\leqslant\frac{n^2+4+16-n^2}{2}=10$.

当 $n^2=6$ 时取"="，所以 $|AB|$ 的最大值为10.

此时直线 AB 的方程为 $2x\pm\sqrt{6}y-2=0$.

对于直线 $2x-\sqrt{6}y-2=0$，$(2\times6-\sqrt{6}\times0-2)[2\times1-\sqrt{6}\times(-2)-2]>0$，

点 P，D 在同侧，不合题意，所以取直线 $AB:2x+\sqrt{6}y-2=0$.

点 P 到直线 AB 的距离 $d_1=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{10}}$，点 D 到直线 AB 的距离 $d_2=\sqrt{10}$，

所以 $S_{四边形PADB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot(d_1+d_2)=5\sqrt{10}+2\sqrt{15}$. ……………………………… 12分

22. 解：本题考查极坐标与参数方程.

(1)由 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，得 $\rho\cos\theta=3$，即 $x=3$，代入 C 中，

得 $t^2=1$，即 $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$，所以交点的极坐标为 $(3\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$. ……………………………… 4分

(2)将 $\rho\sin(\alpha-\theta)=2\sqrt{3}\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})$ 展开，代入 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$，

得 $\sin\alpha(x-3)=\cos\alpha(y-\sqrt{3})$，直线过定点 $(3,\sqrt{3})$.

因为 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，所以 $l:y=\sqrt{3}x-2\sqrt{3}$，将 C 的参数方程代入，

因为 $2t^4+1=\sqrt{3}t^2$ 无解，所以 l 与 C 没有交点.

设 $M(a,b)$，$d=\frac{|\sqrt{3}a-b-2\sqrt{3}|}{2}=\frac{|\sqrt{3}t^2-2t^4-1|}{2}$，

所以当 $t^2=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 时，$d_{min}=\frac{5}{16}$. ……………………………… 10分

23. 解：本题考查不等式的证明.

(1)因为 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)\leqslant3(a^2+b^2+c^2)=9$，

所以 $|a+b+c|\leqslant3$，当且仅当 $a=b=c=\pm1$ 时取"=". ……………………………… 5分

(2) $\frac{a^4}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{4}\geqslant a^2$，当且仅当 $2a^2=b^2+c^2$ 时取"=".

同理可得 $\frac{b^4}{a^2+c^2}+\frac{a^2+c^2}{4}\geqslant b^2$，当且仅当 $2b^2=a^2+c^2$ 时取"=".

$\frac{c^4}{b^2+a^2}+\frac{b^2+a^2}{4}\geqslant c^2$，当且仅当 $2c^2=a^2+b^2$ 时取"=".

所以 $\frac{a^4}{b^2+c^2}+\frac{b^4}{a^2+c^2}+\frac{c^4}{a^2+b^2}\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=\frac{3}{2}$，当且仅当 $a^2=b^2=c^2=1$ 时取"=". ………………… 10分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 " 专业、专注、有态度 " 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。