答案以及解析

1.答案：A

解析：因为 $M=\{x\in\mathbf{N}^{*}\mid 2^{x}\le 16\}=\{x\in\mathbf{N}^{*}\mid x\le 4\}=\{1,2,3,4\}$，$N=\{x\mid x^{2}-2x-8<0\}=\{x\mid -2<x<4\}$，所以 $M\cap N=\{1,2,3\}$，故选 A.

2.答案：B

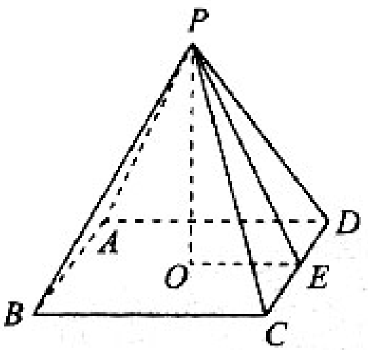
解析：本题考查复数的除法运算、复数的虚部．依题意，$z=\dfrac{1+4\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}=\dfrac{(1+4\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}=\dfrac{3+2\mathrm{i}+12\mathrm{i}-8}{13}=-\dfrac{5}{13}+\dfrac{14}{13}\mathrm{i}$，故复数 z 的虚部为 $\dfrac{14}{13}$，故选 B.

3.答案：B

解析：命题 $p:\exists x\in[0,+\infty),\mathrm{e}^{x}<x^{2}-x$ 的否定为 $\forall x\in[0,+\infty),\mathrm{e}^{x}\geqslant x^{2}-x$.故选 B.

4.答案：D

解析：本题考查数学文化背景下的黄金分割正四棱锥的概念及其有关计算.如图，由题可知，$\mathrm{Rt}\triangle POE$ 为黄金分割直角三角形，设 $OE=a$，则 $CD=2a$.又 $\dfrac{OE}{PE}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，则 $PE=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}a$，则 $PO=\sqrt{PE^{2}-OE^{2}}=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}a$，$\therefore$ 以四棱锥的高为边长的正方形的面积 $S=PO^{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}a^{2}$．$\because$ 正四棱锥的四个侧面是全等的，$\therefore S_{侧}=4S_{\triangle PCD}=4\times\dfrac{1}{2}CD\cdot PE=2(1+\sqrt{5})a^{2}$，$\therefore$ 以四棱锥的高为边长的正方形面积与该四棱锥的侧面积之比为 $\dfrac{1}{4}$.故选 D.



5.答案：C

解析：本题考查抛物线的定义及其几何性质。过点 M，N 分别作抛物线准线的垂线，垂足分别为 M_1, N_1，由 $|MF|+|NF|=6$，得 $|MM_1|+|NN_1|=6$，所以 MN 的中点到准线的距离为

$\dfrac{|MM_1|+|NN_1|}{2}=3$，故选 C.

6.答案：D

解析：本题考查计数原理、古典概型.从六大风景区中任选两个景区进行游览休整，共有 $C_6^2=15$（种）情况，其中，选中“吴家山森林公园”的情况有 $C_5^1=5$（种）情况，故所求的概率为 $P=\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{3}$.故选 D.

7.答案：C

解析：由 $2f(2)=f(16)$ 可得 $2\cdot 2^{\alpha}=2^{4\alpha}$，$\therefore 1+\alpha=4\alpha,\therefore \alpha=\dfrac{1}{3}$，即 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$，由此可知函数 $f(x)$ 在 R 上单调递增.而由换底公式可得 $\log_4 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 4}=\dfrac{1}{2}$，$\ln 2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 e}$，$5^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，

$\because 1<\log_2 e<2$，$\therefore \dfrac{\log_2 2}{\log_2 4}<\dfrac{\log_2 2}{\log_2 e}$，于是 $\log_4 2<\ln 2$，又 $\because \dfrac{1}{\sqrt{5}}<\dfrac{1}{2}$，$\therefore 5^{-\frac{1}{2}}<\log_4 2$，故 a，b，c 的大小关系是 $b>a>c$.

8.答案：B

解析：通解：因为函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称.由 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，得 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(0)=f(2)=0$，所以当 $x<0$ 或 $x>2$ 时，$f(x)>0$，当 $0<x<2$ 时，$f(x)<0$.$f(x)f(x+1)<0$ 等价于 $\begin{cases}f(x)>0,\\f(x+1)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}f(x)<0,\\f(x+1)>0.\end{cases}$

即 $\begin{cases}x<0\text{或}x>2,\\0<x+1<2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<2,\\x+1<0\text{或}x+1>2,\end{cases}$ 解得 $-1<x<0$ 或 $1<x<2$，故选 B.

优解：当 $x=1$ 时，$f(1)f(2)=0$，所以排除 C；因为函数 $y=f(x+1)$ 是偶函数，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，又 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又 $f(2)=0$，所以 $f\left(\dfrac{3}{2}\right)<0$，$f\left(\dfrac{5}{2}\right)>0$，所以当 $x=\dfrac{3}{2}$ 时，$f\left(\dfrac{3}{2}\right)f\left(\dfrac{5}{2}\right)<0$，故排除 A，D.故选 B.

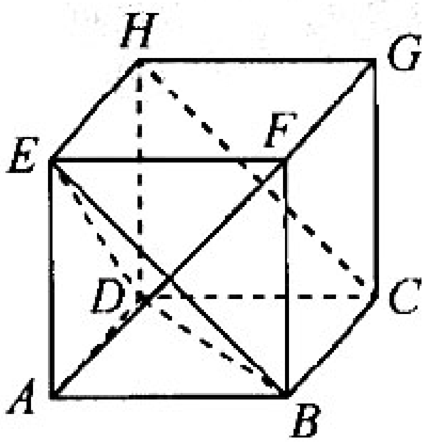
9.答案：BD

解析：对 A，当 $c^2=0$ 时，$\dfrac{c^2}{a}=\dfrac{c^2}{b}$，故错误.对 B，$\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}=\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=2\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\right)$.因为 $a>b>0$，所以 $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}$，所以 $\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}<0$，故正确.对 C，当 $a=3$ [illegible]

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，但$a^2+b^2>8$，故错误.对 D，由$a>b>0$，且$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=2$，得$2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}$，当且仅当$a=b=1$时，取等号．因为$a\neq b$，所以$\frac{1}{ab}<1$，则$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2-\frac{2}{ab}=4-\frac{2}{ab}>2$，所以$\log_2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)>1$，故正确.选 BD.

10.答案：ABC

解析：本题考查正方体的展开图，空间中线线、线面的位置关系.由正方体的展开图还原正方体如图.对于 A，因为$AE\perp$平面$ABCD$，$BC\subset$平面$ABCD$，所以$AE\perp BC$，故 A 正确；对于 B，由$HE//BC$，$HE=BC$，得四边形 $BCHE$ 为平行四边形，所以$CH//BE$，又$BE\subset$平面BDE，$CH\not\subset$平面BDE，所以$CH//$平面BDE，故 B 正确；对于 C，因为$BC\perp$平面$ABFE$，$AF\subset$平面$ABFE$，所以$AF\perp BC$，又$AF\perp BE$，$BE\cap BC=B$，所以$AF\perp$平面$BCHE$，故 C 正确；对于 D，易知$V_{ABE-DCH}=\frac{1}{2}V_{ABCD-EFGH}$，$V_{D-BCHE}=V_{ABE-DCH}-V_{D-ABE}=V_{ABE-DCH}-\frac{1}{3}V_{ABE-DCH}=\frac{2}{3}V_{ABE-DCH}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}V_{ABCD-EFGH}=\frac{1}{3}V_{ABCD-EFGH}$，即$\frac{V_{D-BCHE}}{V_{ABCD-EFGH}}=\frac{1}{3}$，故 D 错误.故选 ABC.



11.答案：ABC

解析：本题考查三角函数的零点、图像与性质.根据函数$f(x)=A\cos(\omega x+\varphi)$的部分图像知，$A=2$，设$f(x)$的最小正周期为$T$，则$\frac{T}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，$\therefore T=2\pi$，$\omega=\frac{2\pi}{T}=1$.

$\because f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)=2$，且$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6}$，

故$f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$.

令 $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$，得 $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

即 $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，因此函数 $f(x)$ 最靠近原点的零点为 $-\frac{\pi}{3}$，故 A 正确；

由 $f(0)=2\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$，因此函数 $f(x)$ 的图像在 y 轴上的截距为 $\sqrt{3}$，故 B 正确；

由 $f\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)=2\cos(x-\pi)=-2\cos x$，因此函数 $f\left(x-\frac{5\pi}{6}\right)$ 是偶函数，故 C 正确；

令 $2k\pi-\pi\leqslant x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，得 $2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6},k\in\mathbf{Z}$，此时函数 $f(x)$ 单调递增，于是函数 $f(x)$ 在 $\left(2\pi,\frac{13\pi}{6}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{13\pi}{6},\frac{7\pi}{3}\right)$ 上单调递减，故 D 不正确.故选 ABC.

12.答案：BCD

解析：本题考查等差数列的性质.由对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$ 知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，则由 4 是 a_1^2 与 a_5^2 的等差中项，得 $a_1^2+a_5^2=8$，即 $a_1^2+(a_1+4d)^2=8$ ①.

设 $t=S_2=2a_1+d$，则 $d=t-2a_1$，代入①式整理得 $50a_1^2-56ta_1+16t^2-8=0$ ②.因为方程②有实根，所以 $\Delta=(-56t)^2-4\times 50\times(16t^2-8)\geqslant 0$，整理得 $t^2\leqslant 25$，即 $-5\leqslant t\leqslant 5$，故选 BCD.

13.答案：4

解析：本题考查双曲线的方程与几何性质、渐近线方程及其性质.由双曲线 $C:\frac{x^2}{m}-y^2=1$ 可得其渐近线方程为 $\frac{x}{\sqrt{m}}\pm y=0$，而其中一条渐近线为 $\sqrt{3}x+my=0$，则有 $\frac{1}{\sqrt{m}}=\frac{\sqrt{3}}{m}$，解得 $m=3$，故 $c=\sqrt{m+1}=2$，所以 C 的焦距为 $2c=4$.

14.答案：$\sqrt{21}$

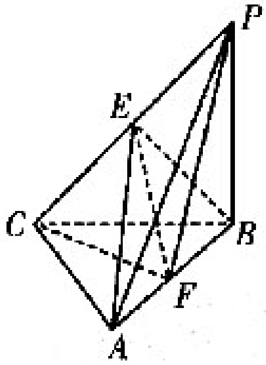
解析：本题考查平面向量的数量积、向量的模的运算.

$|3a-b|=\sqrt{(3a-b)^2}=\sqrt{9|a|^2+|b|^2-6a\cdot b}=$

$\sqrt{9|a|^2+|b|^2-6|a|\cdot|b|\cdot\cos\frac{\pi}{6}}=\sqrt{36+3-6\times 2\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{21}$.

15.答案：24π

解析：如图，取 AB 的中点 F，连接 EF，PF，



因为 $AP=BP=2\sqrt{3}$，所以 $PF\perp AB$，所以在 $Rt\triangle PAF$ 中，$PF=\sqrt{PA^2-AF^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{5})^2}=\sqrt{7}$.易知 $\triangle PAC\cong\triangle PBC$，则 $AE=BE$，所以 $EF\perp AB$.

因为 $\triangle AEB$ 的面积为 $\sqrt{5}$，所以 $\frac{1}{2}AB\cdot EF=\frac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times EF=\sqrt{5}$，解得 $EF=1$.连接 FC，易知 $FC=\sqrt{7}=PF$，所以 $EF\perp PC$，即 $\triangle PEF$ 为直角三角形，则 $PE=\sqrt{PF^2-EF^2}=\sqrt{6}$，所以 $PC=2\sqrt{6}$，则 $PC^2=AC^2+AP^2=BC^2+BP^2$，所以 $\angle PAC=\angle PBC=90°$，所以 $EA=EB=EP=EC$，所以 E 为三棱锥 $P-ABC$ 的外接球球心，其半径 $R=\frac{1}{2}PC=\sqrt{6}$，所以外接球的表面积 $S=4\pi\times(\sqrt{6})^2=24\pi$.

16.答案：$\left[\frac{1}{e-1},+\infty\right)$

解析：$x-\ln x+a-\frac{ae^x}{x}\leqslant0\Leftrightarrow a\left(\frac{e^x}{x}-1\right)\geqslant x-\ln x=\ln\frac{e^x}{x}$，设 $t(x)=\frac{e^x}{x}$，$x>0$，则 $t'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$t'(x)<0$，$t(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$t'(x)>0$，$t(x)$ 单调递增，所以 $t(x)_{\min}=t(1)=e$，所以 $t(x)\geqslant e$，所以原不等式等价于 $a(t-1)\geqslant\ln t(t\geqslant e)$，即 $a\geqslant\frac{\ln t}{t-1}(t\geqslant e)$.设 $f(t)=\frac{\ln t}{t-1}$，$t\in[e,+\infty)$，则 $f'(t)=\frac{1-\frac{1}{t}-\ln t}{(t-1)^2}<0$，所以 $f(t)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递减，所以 $a\geqslant f(t)_{\max}=f(e)=\frac{1}{e-1}$.

17.答案：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d(d>0)$.

由题得 $\begin{cases}a_1+a_5=2a_3=12,\\a_2\cdot a_4=(a_3-d)(a_3+d)=32,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a_3=6,\\d=2,\end{cases}$

所以 $a_n=a_3+(n-3)d=2n$.

(2) $b_n=n\cdot 2^{a_n}=n\cdot 2^{2n}=n\cdot 4^n$，

则 $S_n=4+2\times 4^2+3\times 4^3+\cdots+n\cdot 4^n$，

$4S_n=4^2+2\times 4^3+3\times 4^4+\cdots+(n-1)\cdot 4^n+n\cdot 4^{n+1}$，

两式相减得 $-3S_n=4+4^2+4^3+\cdots+4^n-n\cdot 4^{n+1}$

$=\dfrac{4(1-4^n)}{1-4}-n\cdot 4^{n+1}=\dfrac{1-3n}{3}\cdot 4^{n+1}-\dfrac{4}{3}$，

故 $S_n=\dfrac{3n-1}{9}\cdot 4^{n+1}+\dfrac{4}{9}$.

18.答案：（1）依题意得 $c\cos B+2\cos C=2\sqrt{2}\sin A$.

因为 $b=2$，所以 $c\cos B+b\cos C=2\sqrt{2}\sin A$，

由正弦定理，得 $2R\sin C\cos B+2R\cos C\sin B=2R\sin(B+C)=$

$2R\sin A=2\sqrt{2}\sin A$（R 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径），

又 $A\in(0,\pi)$，即 $\sin A\neq 0$，所以 $2R=2\sqrt{2}$，即 $R=\sqrt{2}$，

故 $\triangle ABC$ 外接圆的面积 $S=\pi R^2=2\pi$.

（2）由（1）可知，$\dfrac{b}{\sin B}=2\sqrt{2}$，故 $\sin B=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又 C，A，B 成等差数列，故 $A=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $B=\dfrac{\pi}{4}$，$C=\dfrac{5\pi}{12}$.

故由 $\dfrac{a}{\sin A}=2\sqrt{2}$，解得 $a=\sqrt{6}$.

又 $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$，

故 $\triangle CAM$ 的面积 $S_{\triangle CAM}=\dfrac{2}{3}S_{\triangle ABC}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\sqrt{6}\times 2\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

由 $\dfrac{c}{\sin C}=2\sqrt{2}$，得 $c=2\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}=\sqrt{3}+1$，则 $BM=\dfrac{1}{3}(\sqrt{3}+1)$.

在 $\triangle CBM$ 中，由余弦定理得 $CM^2=CB^2+BM^2-2CB\cdot BM\cdot\cos B=\dfrac{40-4\sqrt{3}}{9}$.

19.答案：（1）由题表中的数据可得 $\overline{x}=\dfrac{1}{4}\times(1+2+3+4)=2.5$，

$\overline{y}=\dfrac{1}{4}\times(4+6+9+11)=7.5$，

$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{4}(x_i-\overline{x})^2}=2.4,$$

$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=7.5-2.4\times2.5=1.5$，

所以 y 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=2.4x+1.5$.

当 $x=5$ 时，可得 $\hat{y}=2.4\times5+1.5=13.5$，

所以预测下一个调研周期内该地区新增的退休人数为 13.5 万人.

（2）因为 $K^2=\dfrac{100\times(42\times13-8\times37)^2}{50\times50\times79\times21}\approx1.507<2.706$，

所以没有 90% 的把握认为支持延迟退休与性别有关.

20.答案：(1)取 DC 的中点 E，连接 BE，则 $AB=AD=DE=CE$，

又 $AB//CD$，所以四边形 $ABED$ 为菱形，

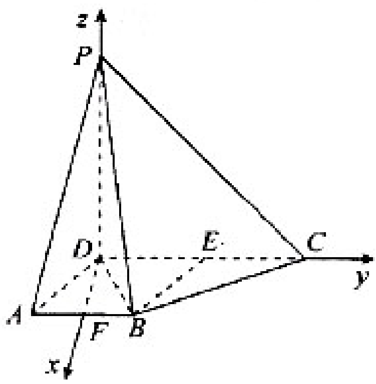
所以 $BE=DE=CE$，

所以 $\angle DBC=90^\circ$，即 $BC\perp BD$.

因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，$BC\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PD\perp BC$，

因为 $BD\cap PD=D$，所以 $BC\perp$ 平面 PBD，

又 $PB\subset$ 平面 PBD，所以 $BC\perp PB$.



(2)如图，取 AB 的中点 F，连接 DF.

因为 $\angle ADC=120^\circ$，BD 平分 $\angle ADC$，所以 $\angle ADB=60^\circ$.

因为 $AB=AD$，所以 $\triangle ABD$ 是等边三角形，所以 $\angle BDF=30^\circ$，

所以 $\angle CDF=90^\circ$，即 $CD\perp DF$.

因为 $PD\perp$ 底面 $ABCD$，所以 $PD\perp DF$，$PD\perp CD$.

故以 D 为坐标原点，以 DF，DC，DP 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

不妨令 $DC=PD=2AB=2AD=4$，

则 $A(\sqrt{3},-1,0)$，$B(\sqrt{3},1,0)$，$C(0,4,0)$，$P(0,0,4)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BP}=(-\sqrt{3},-1,4)$，$\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},3,0)$．

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=2y_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{3}x_1-y_1+4z_1=0,\end{cases}$

取 $x_1=4$，得 $\boldsymbol{m}=(4,0,\sqrt{3})$，

设平面 PBC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=-\sqrt{3}x_2+3y_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BP}=-\sqrt{3}x_2-y_2+4z_2=0.\end{cases}$

取 $x_2=\sqrt{3}$，得 $\boldsymbol{n}=(\sqrt{3},1,1)$，

故 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{5\sqrt{3}}{\sqrt{19}\times\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{285}}{19}$．

由图可知，二面角 $A-PB-C$ 的平面角为钝角，

所以二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{285}}{19}$．

21.答案：（1）由题得 $\begin{cases}2c=2,\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{4b^2}=1,\\ a^2-b^2=c^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=2,\\ b=\sqrt{3},\\ c=1,\end{cases}$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$．

（2）根据题意可知直线 MN 的斜率存在，设直线 MN 的方程为 $y=kx+m$，

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$

消去 y 并整理得 $(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

由 $\Delta=64k^2m^2-4(3+4k^2)(4m^2-12)=0$，

得 $m^2=3+4k^2$，

所以 $x_M=\dfrac{-4km}{3+4k^2}=-\dfrac{4k}{m},y_M=\dfrac{3m}{3+4k^2}=\dfrac{3}{m}$，即 $M\left(-\dfrac{4k}{m},\dfrac{3}{m}\right)$．

因为抛物线 $y^2=-16x$ 的准线方程为 $x=4$，

所以当 $x=4$ 时，$y_N=4k+m$，所以 $N(4,4k+m)$。

设点 $P(s,t)$，因为 $PM\perp PN$，所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=0$，

所以 $\left(-\dfrac{4k}{m}-s,\dfrac{3}{m}-t\right)\cdot(4-s,4k+m-t)=0$，

即 $(s-1)(ms+4k-3m)-t\left(m^2+4km-tm+3\right)=0$（*）。

当 $\begin{cases}s-1=0,\\ t=0,\end{cases}$ 即 $s=1,t=0$ 时，方程（*）恒成立，

所以点 P 的坐标为 $(1,0)$。

22.答案：（1）$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}+a+\dfrac{1}{x}$，则 $f'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}$，

则当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。

$\therefore f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,1)$，单调递减区间为 $(1,+\infty)$。

当 $a=1$ 时，$f(x)_{\max}=f(1)=1+a=2$。

（2）由题得当 $x>0$ 时，$\dfrac{\ln x+ax+1}{x}\leqslant e^x$ 恒成立，

即 $\ln x+ax+1\leqslant xe^x$ 恒成立，

即 $xe^x-\ln x-ax-1\geqslant 0$ 恒成立。

令 $F(x)=xe^x-\ln x-ax-1$，则 $F'(x)=(1+x)e^x-\dfrac{1}{x}-a$，

令 $g(x)=(1+x)e^x-\dfrac{1}{x}-a$，则 $g'(x)=(2+x)e^x+\dfrac{1}{x^2}>0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，

$\therefore F'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$F'(x)\to+\infty$，

$\therefore \exists x_0\in(0,+\infty)$，使得 $F'(x_0)=0$，即 $a=(1+x_0)e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}$，

$\therefore F(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增，

故 $F(x)_{\min}=F(x_0)=x_0e^{x_0}-\ln x_0-ax_0-1=-\left(x_0^2e^{x_0}+\ln x_0\right)\geqslant 0$，

即 $x_0e^{x_0}\leqslant-\dfrac{\ln x_0}{x_0}$。

而 $h(x)=xe^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $h\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)=-\dfrac{\ln x}{x}$，$\therefore h(x_0)\leqslant h\left(\ln\dfrac{1}{x_0}\right)$，

即当 $x_0\leqslant\ln\dfrac{1}{x_0}$ 时，$F(x)\geqslant 0$ 恒成立，

$\therefore a=(1+x_0)e^{x_0}-\dfrac{1}{x_0}\leqslant\dfrac{1+x_0}{x_0}-\dfrac{1}{x_0}=1$，

故实数 a 的取值范围为 $(-\infty,1]$。

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》