1.正实数x,y,z,w满足$x\ge y\ge w$，且$x+y\le 2(w+z)$，则$\frac{w}{x}+\frac{z}{y}$得最小值等于（　　）

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{7}{8}$　　C.1　　D.前三个答案都不对

解析：因为$x+y\le 2(w+z)$，则$z\ge\frac{x+y-2w}{2}$

则$\frac{w}{x}+\frac{z}{y}\ge\frac{w}{x}+\frac{x+y-2w}{2y}=\frac{w}{x}+\frac{x}{2y}-\frac{w}{y}+\frac{1}{2}=\frac{x}{2y}+\frac{1}{2}+w\cdot\frac{y-x}{xy}$

$\ge\frac{x}{2y}+\frac{1}{2}+\frac{y-x}{xy}\cdot y=\frac{x}{2y}+\frac{1}{2}+\frac{y-x}{x}=\frac{x}{2y}+\frac{x}{y}-\frac{1}{2}\ge\sqrt{2}-\frac{1}{2}$

当且仅当$x=\sqrt{2}y$，$y=w$，$x+y=2(w+z)$时，等号成立，故选 D.

2.在$(2019\times 2020)^{2021}$的全体正因数中选出若干个，使得其中任意两个的乘积都不是平方数，则最多可选因数个数为（　　）

A.16　　B.31　　C.32　　D.前三个答案都不对

解析：素数唯一分解理论

因为$(2019\times 2020)^{2021}=2^{4042}\times 5^{2021}\times 101^{2021}\times 3^{2021}\times 673^{2021}$

可以选取最小质数2,3,5,101,673，那么剩下的单个质因数的偶数次方出现的最多只能选取一个，不放选2^2，再进行组合，再5个因数里面分别选取2个，3个，4个，5个

则一共有32个，则最多可以选取32个，故选C.

3. 已知数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1,a_2=4$，且对任意的$n\ge 2$有$a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=2^{n-1}$，则$a_{2020}$的个位数字是（　　）.

A.8　　B.4　　C.2　　D. 前三个答案都不对

解析：因为$a_n^2-a_{n-1}a_{n+1}=2^{n-1}$，则$a_{n+1}^2-a_na_{n+2}=2^n$

因此$2a_n^2-2a_{n-1}a_{n+1}=a_{n+1}^2-2a_na_{n+2}$，则$\frac{2a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{2a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}=\frac{2a_1+a_3}{a_2}$

因为$a_2^2=a_1a_3+2$，则$a_3=14$，故$\frac{2a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{2a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}=\frac{2a_1+a_3}{a_2}=4$

即$a_{n+1}=4a_n-2a_{n-1}$，欲求个位数字，只需让a_n模 10.

其结果为$1,4,4,8,4,0,2,8,8,6,8,0,4,6,6,2,6,0,8,2,2,4,2,0,6,4,4,8,4,0\cdots$

从 a_2 开始周期为 24，则 a_{2020} 的个位数字是 8，故选 A.

4.设 a,b,c,d 是方程 $x^4+2x^3+3x^2+4x+5=0$ 的 4 个复根，则 $\frac{a-1}{a+2}+\frac{b-1}{b+2}+\frac{c-1}{c+2}+\frac{d-1}{d+2}$ 的值为（　　）

A. $-\frac{4}{3}$　　　B. $-\frac{2}{3}$　　　C. $\frac{2}{3}$　　　D. 前三个答案都不对

解析：由题意可得 $s=a+b+c+d=-2$， $p=ab+ac+ad+bc+bd+cd=3$

$q=abc+abd+acd+bcd=-4$， $r=abcd=5$，设 $m=\frac{a-1}{a+2}+\frac{b-1}{b+2}+\frac{c-1}{c+2}+\frac{d-1}{d+2}$

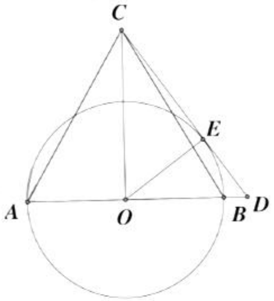
则 $m=4-3\left(\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}\right)$，只需求 $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}$

则 $\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+2}+\frac{1}{c+2}+\frac{1}{d+2}=\frac{\sum(b+2)(c+2)(d+2)}{(a+2)(b+2)(c+2)(d+2)}=\frac{q+32+12s+4p}{r+16+2q+4p+8s}=\frac{16}{9}$

故 $m=4-\frac{16}{3}=-\frac{4}{3}$，由此可得选 A.

5.设等边三角形 ABC 的边长为 1，过点 C 作以 AB 为直径的圆的切线交 AB 的延长线于点 D，$AD>BD$，则三角形 BCD 的面积为（　　）

A. $\frac{6\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{16}$　　B. $\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{16}$　　C. $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{16}$　　D. 前三个答案都不对



解析：如图所示，其中 $OE=OB=\frac{1}{2}$

$CO=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则 $CE=\frac{\sqrt{2}}{2}$

从而可得 $\frac{OD}{OC}=\frac{OE}{CE}$，故 $OD=\frac{\sqrt{6}}{4}$

则 $S_{\Delta BCD}=\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{16}$，故选 C.

6.设 x,y,z 均不为 $\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi$，其中 k 为整数，已知 $\sin(y+z-x),\sin(x+z-y),\sin(x+y-z)$ 成等差数列，则依然成等差数列的是（　　）

A. $\sin x,\sin y,\sin z$　　　B. $\cos x,\cos y,\cos z$

C. $\tan x,\tan y,\tan z$　　　D. 前三个答案都不对

解析：因为 $2\sin(x+z-y)=\sin(y+z-x)+\sin(x+y-z)=2\sin y\cos(x-z)$

则 $\sin(x+z)\cos y-\cos(x+z)\sin y=\sin y\cos(x-z)$

则 $\sin(x+z)\cos y=\sin y\left[\cos(x+z)+\cos(x-z)\right]=2\sin y\cos x\cos z$

则 $\tan x+\tan z=2\tan y$，故选 C.

7. 方程 $19x+93y=4xy$ 的整数解的个数为（　　）

A.4　　B.8　　C.16　　D. 前三个答案都不对

解析：因式分解与整除

因为 $19x+93y=4xy$，则 $(4x-93)(4y-19)=93\times19=3\times19\times31$

则 $\begin{cases}4y-19=1\\4x-93=93\times19\end{cases}$，此时 $\begin{cases}y=5\\x=455\end{cases}$；则 $\begin{cases}4y-19=-1\\4x-93=-93\times19\end{cases}$，此时无解.

则 $\begin{cases}4y-19=3\\4x-93=31\times19\end{cases}$，此时无解；则 $\begin{cases}4y-19=-3\\4x-93=-31\times19\end{cases}$，此时 $\begin{cases}y=4\\x=-124\end{cases}$

则 $\begin{cases}4y-19=19\\4x-93=93\end{cases}$，此时无解；则 $\begin{cases}4y-19=-19\\4x-93=-93\end{cases}$，此时 $\begin{cases}y=0\\x=0\end{cases}$.

则 $\begin{cases}4y-19=31\\4x-93=57\end{cases}$，此时无解；则 $\begin{cases}4y-19=-31\\4x-93=-57\end{cases}$，此时 $\begin{cases}y=-3\\x=9\end{cases}$.

则 $\begin{cases}4y-19=57\\4x-93=31\end{cases}$，此时 $\begin{cases}y=19\\x=31\end{cases}$；则 $\begin{cases}4y-19=-57\\4x-93=-31\end{cases}$，此时无解.

则 $\begin{cases}4y-19=93\\4x-93=19\end{cases}$，此时 $\begin{cases}y=28\\x=28\end{cases}$；则 $\begin{cases}4y-19=-93\\4x-93=-19\end{cases}$，此时无解

则 $\begin{cases}4y-19=31\times19\\4x-93=3\end{cases}$，此时 $\begin{cases}y=152\\x=24\end{cases}$；则 $\begin{cases}4y-19=-31\times19\\4x-93=-3\end{cases}$，此时无解

则 $\begin{cases}4y-19=19\times93\\4x-93=1\end{cases}$，此时无解；则 $\begin{cases}4y-19=-19\times93\\4x-93=-1\end{cases}$，此时 $\begin{cases}y=-437\\x=23\end{cases}$，故共 8 组，选 B

解析二：同余

因为 $19x+93y=4xy$，则 $(4x-93)(4y-19)=93\times19=3\times19\times31$

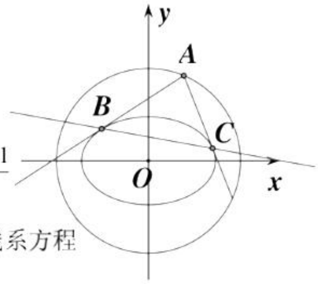
因为 $4x-93\equiv3\pmod 4$，$4y-19\equiv1\pmod 4$

则 $\begin{cases}4x-93=3,19,31,1767,-1,-57,-93,-589\\4y-19=\cdots\end{cases}$，故共 8 组，选 B.

8. 从圆 $x^2+y^2=4$ 上的点向椭圆 $C:\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ 引切线，两切点间的线段成为切点弦，则椭圆 C 内不与任何切点弦相交的区域面积为（　　）

A. $\frac{\pi}{2}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. 前三个答案都不对

解析：切线系方程



如图所示，设点 $A(2\cos\theta,2\sin\theta)$

则 BC 直线方程为 $\cos\theta\cdot x+2\sin\theta\cdot y=1$

由于 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$ 的切线方程为 $\frac{\cos\theta\cdot x}{a}+\frac{\sin\theta\cdot y=1}{b}$

则 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$，因此 $\cos\theta\cdot x+2\sin\theta\cdot y=1$ 为椭圆 $x^2+4y^2=1$ 的切线系方程

由椭圆的面积可得 $\pi ab=\frac{\pi}{2}$，故选 A.

9.使得 $5x+12\sqrt{xy}\le a(x+y)$ 对所有正实数 x,y 都成立的实数 a 的最小值为（　　）

A.8　　B.9　　C.10　　D. 前三个答案都不对

解析：待定系数

$5x+12\sqrt{xy}=5x+12\sqrt{mx\cdot\frac{y}{m}}\le(5+6m)x+\frac{6}{m}y$，令 $5+6m=\frac{6}{m}$，$m=\frac{2}{3}$

则 $5x+12\sqrt{xy}\le 9(x+y)$，则 $\frac{5x+12\sqrt{xy}}{x+y}\le 9$，则 $a\ge 9$，故选 B.

10.设 P 为单位立方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 上的一点，则 PA_1+PC_1 的最小值为（　　）

A. $\sqrt{2+\sqrt{2}}$　　B. $\sqrt{2+2\sqrt{2}}$　　C. $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D. 前三个答案都不对

解析：最小值为 $\sqrt{2}$，故选 D.

11.数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,a_2=9$，且对任意 $n\ge 1$ 有 $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n-20$，其中前 n 项和为 S_n，

则函数 S_n 的最大值等于（　　）

A.28　　B.35　　C.47　　D. 前三个答案都不对

解析：因为 $a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n-20$，则 $a_{n+2}-a_{n+1}-10=3(a_{n+1}-a_n-10)$

故 $a_{n+1}-a_n=10-2\times 3^{n-1}$，则当 $n\ge 3$ 时，数列为单调递减数列

可求得 $a_3=13,a_4=5$，当 $n\ge 5$ 时，$a_n<0$，则 S_n 的最大值为 $S_4=28$，故选 A.

12.设直线 $y=3x+m$ 与椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 交于 A,B 两点，O 为坐标原点，则三角形 OAB 的面积的最大值为（　　）

A.8　　B.10　　C.12　　D. 前三个答案都不对

解析一：直接计算

联立方程可得 $241x^2+150mx+25m^2-400=0$

则 $AB=\sqrt{10}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{10}\times\dfrac{40\sqrt{241-m^2}}{241}$， $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{10}}$

$S=\dfrac{1}{2}AB\cdot d=\dfrac{20}{241}\cdot\sqrt{m^2\left(241-m^2\right)}\le 10$，故面积的最大值为 10，故选 B.

解析二：仿射变换

不妨设 $\dfrac{x}{5}=X,\dfrac{y}{4}=Y$，则 $X^2+Y^2=1$，直线为 $4Y=15X+1$

则 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{241}}$，故 $S'=\dfrac{1}{2}d\cdot AB=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{|m|}{\sqrt{241}}\times\dfrac{2\sqrt{241-m^2}}{\sqrt{241}}=\dfrac{\sqrt{m^2\left(241-m^2\right)}}{241}\le\dfrac{1}{2}$

则 $S_{\Delta OAB}=20S'\le 10$，故面积的最大值为 10，故选 B.

13.正整数 $n\ge 3$ 称为理想的，若存在正整数 $1\le k\le n-1$ 使得 $C_n^{k-1},C_n^k,C_n^{k+1}$ 构成等差数列，其中 $C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数，则不超过 2020 的理想数个数为（　　）

A.40　　B.41　　C.42　　D. 前三个答案都不对

解析：由题意可得 $C_n^{k-1},C_n^k,C_n^{k+1}$ 构成等差数列

则 $2C_n^k=C_n^{k-1}+C_n^{k+1}$，化简可得 $n^2-(4k+1)n+4k^2-2=0$

以 k 为主元整理 $4k^2-4nk+n^2-n-2=0$，则 $k=\dfrac{n\pm\sqrt{n+2}}{2}$

则 $n+2$ 为完全平方数，则 $n+2=m^2$，则 $44\ge m\ge 3$

若 $k=\dfrac{n-\sqrt{n+2}}{2}=\dfrac{m^2-m-2}{2}=\dfrac{(m-2)(m+1)}{2}$，因为 $m-2,m+1$ 奇偶性相反

故则对于任意 $44\ge m\ge 3$ 都满足题意

同理 $k=\dfrac{n+\sqrt{n+2}}{2}=\dfrac{m^2+m-2}{2}=\dfrac{(m+2)(m-1)}{2}$，因为 $m+2,m-1$ 奇偶性相反

故则对于任意 $44\ge m\ge 3$ 都满足题意

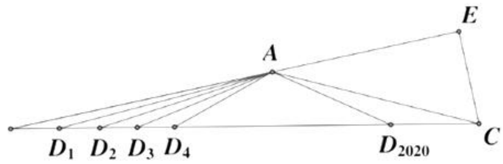
综上：满足题意的有 42 个，故选 C.

14.在 ΔABC 中，$\angle A=150$，$D_1,D_2,\ldots,D_{2020}$ 依次为边 BC 上的点，且 $BD_1=D_1D_2=D_2D_3=\cdots$ $=D_{2019}D_{2020}=D_{2020}C$，设 $\angle BAD_1=\alpha_1,\angle D_1AD_2=\alpha_2,\cdots$，$\angle D_{2019}AD_{2020}=\alpha_{2020},\angle D_{2020}AC=\alpha_{2021}$，

则 $\dfrac{\sin\alpha_1\sin\alpha_3\cdots\sin\alpha_{2021}}{\sin\alpha_2\sin\alpha_4\cdots\sin\alpha_{2020}}$ 的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{1010}$　　B. $\dfrac{1}{2020}$　　C. $\dfrac{1}{2021}$　　D. 前三个答案都不对

解析：正弦定理



不妨设 $\angle AD_iC=\beta_i$，$BD_1=m$

则 $\dfrac{m}{\sin\alpha_1}=\dfrac{AD_1}{\sin B}$，$\dfrac{m}{\sin\alpha_2}=\dfrac{AD_1}{\sin\beta_2}$

因此 $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\dfrac{\sin B}{\sin\beta_2}$，同理 $\dfrac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_4}=\dfrac{\sin\beta_2}{\sin\beta_4}$

因此 $\dfrac{\sin B\cdot\sin\alpha_{2021}}{\sin\beta_{2020}}=\dfrac{m\sin B}{AC}=\dfrac{2021m\sin B}{2021\cdot AC}=\dfrac{BC\cdot\sin B}{2021\cdot AC}=\dfrac{CE}{2021\cdot AC}=\dfrac{1}{4042}$，故选 D.

15.函数 $f(\theta)=\sqrt{3+2\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta}+\sqrt{5-2\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$ 的最大值为（　　）

A. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{2}+\sqrt{3}$　　C. $\sqrt{2}+2\sqrt{3}$　　D. 前三个答案都不对

解析：易知当 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=3+\sqrt{3}>\sqrt{2}+\sqrt{3}$

因为 $f(\theta)=\sqrt{3}+\cos\theta+\sqrt{5-2\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$

下面证明 $f(\theta)<\sqrt{2}+2\sqrt{3}\Leftrightarrow\sqrt{2}+\sqrt{3}-\cos\theta>\sqrt{5-2\sqrt{3}\cos\theta+\cos^2\theta+4\sin^2\theta}$

两边平方即证 $4\sin^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta<2\sqrt{6}$，

因为 $4\sin^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta\le 4\sin\theta+2\sqrt{2}\cos\theta=2\sqrt{6}\sin(\theta+\varphi)\le 2\sqrt{6}$

两个等号不同时成立，故 $4\sin^2\theta+2\sqrt{2}\cos\theta<2\sqrt{6}$，则选 D.

16.方程 $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$ 的实根个数为（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D. 前三个答案都不对

解析：由题意可得 $\left|\sqrt{x+1}-2\right|+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=1$

当 $1\le\sqrt{x+1}\le 2$ 时，上式恒为 1，故选 D..

17.凸五边形 $ABCDE$ 的对角线 CE 分别与对角线 BD 和 AD 交于点 F 和 G，已知 $BF:FD=5:4,AG:GD=1:1,CF:FG:GE=2:2:3$，$S_{\Delta CFD}$ 和 $S_{\Delta ABE}$ 分别为 ΔCFD 和 ΔABE 的面积，则 $S_{\Delta CFD}:S_{\Delta ABE}$ 的值等于（　　）

A. 8:15　　B. 2:3　　C. 11:23　　D. 前三个答案都不对

解析：如图所示，延长 $CF=CM$

则根据比例可得 $BE//MD$

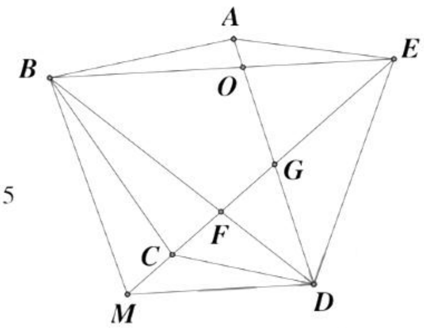
则 $\dfrac{OG}{GD}=\dfrac{EG}{GM}=\dfrac{1}{2}$，因为 G 为 AD 中点

因此 $AO=OG=\dfrac{1}{2}GD$， $MD=\dfrac{4}{5}BE$

$MD=2OE$，则 $OE=\dfrac{2}{5}BE$，不妨设 $S_{\Delta ABE}=5$

则 $S_{\Delta AOE}=2\,S_{\Delta EGD}=4$， $S_{\Delta CFD}=4\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{8}{3}$

因此 $S_{\Delta CFD}:S_{\Delta ABE}=8:15$，故选 A.



18.设 p,q 均为不超过 100 的正整数，则有有理根的多项式 $f(x)=x^5+px+q$ 的个数为（　　）

A.99　　B.133　　C.150　　D. 前三个答案都不对

解析：因为 $f(x)=x^5+px+q$ 有有理根，则有理根必小于零

设 $x_0=-\dfrac{m}{n}$，且 $(m,n)=1$，则 $-\dfrac{m^5}{n^5}-\dfrac{pm}{n}+q=0$

则 $qn^5=m^5+pmn^4$，显然 $n\mid m$，因为 $(m,n)=1$，则 $n=1$，故 $q=m^5+mp$

因为 $q=m^5+mp\le 100$，故 $1\le m\le 2$

当 $m=1$ 时， $q=1+p\le 100$，因此 $1\le q\le 99$，共 99 组

当 $m=2$ 时， $q=32+2p\le 100$，故 $1\le p\le 34$，共 34 组

综上所述：满足条件的 (p,q) 共 133 组，故选 B.

19.满足对任意 $n\ge 1$ 有 $a_{n+1}=2^n-3a_n$ 且严格递增的数列 $\{a_n\}$ 的个数为（　　）

A.0　　B.1　　C.无穷多个　　D. 前三个答案都不对

解析：因为 $a_{n+1}=2^n-3a_n$，则 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{1}{2}$

则 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{1}{5}=-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a_n}{2^n}-\dfrac{1}{5}\right)$，则 $\dfrac{a_n}{2^n}-\dfrac{1}{5}=\left(-\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\left(\dfrac{a_1}{2}-\dfrac{1}{5}\right)$，则 $a_n=\dfrac{2^n}{5}+\left(a_1-\dfrac{2}{5}\right)\cdot(-3)^n$

当 $a_1=\dfrac{2}{5}$ 时，满足严格递增，当 $a_1\ne\dfrac{2}{5}$ 时，会出现正负交替，不满足，故选 B.

20.设函数 $f(x,y,z)=\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{y+z}+\dfrac{z}{z+x}$，其中 x,y,z 均为正实数，则有（　　）

A. f 既有最大值也有最小值　　B. f 有最大值但无最小值

C. f 有最小值但无最大值　　　　D. 前三个答案都不对

解析：糖水不等式

因为 $s=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}<\frac{x+z}{x+y+z}+\frac{y+x}{y+z+x}+\frac{z+y}{z+x+y}=2$

当 $x=0,z=1,y\to+\infty$ 时，$s\to2$，故无最大值

而且 $s=\frac{x}{x+y}+\frac{y}{y+z}+\frac{z}{z+x}>\frac{x}{x+y+z}+\frac{y}{x+y+z}+\frac{z}{x+y+z}=1$

当 $x=0,y=1,z\to+\infty$ 时，$s\to1$，故无最小值，故选 D.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》