高三数学试卷参考答案

1. A　因为 $z=\frac{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^2}{2}=1+\mathrm{i}$，所以 z 在复平面内对应的点位于第一象限.

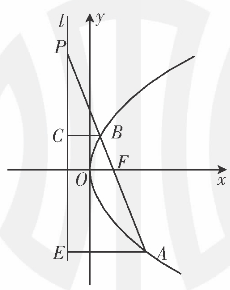
2. C　因为 $A=\{x|-1\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|x\geqslant \mathrm{e}-1\}$，$\complement_{\mathbf{R}}B=\{x|x<\mathrm{e}-1\}$，所以 $A\cap(\complement_{\mathbf{R}}B)=[-1,\mathrm{e}-1)$.

3. C　$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

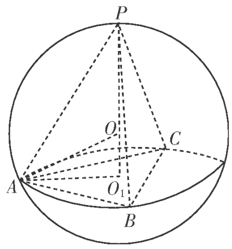
4. B　因为不超过 20 的素数有 2，3，5，7，11，13，17，19，共 8 个，随机选取 2 个不同的数，其和为奇数，则必有 2，所以所求概率 $P=\frac{7}{C_8^2}=\frac{1}{4}$.

5. D　因为展开式中所有项的系数和为 64，令 $x=1$，可得 $(-2)^n=64$，所以 $n=6$.
因为通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r(-3)^r x^{3-r}$，所以 $T_3=C_6^2(-3)^2x=135x$.

6. A　如图，设准线为 l，过 A 作 $AE\perp l$ 于 E，过 B 作 $BC\perp l$ 于 C. 因为 $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AF}$，所以 F 是 PA 的中点，所以 $AF=AE=PF=2p$. 因为 $|BF|=2$，所以 $\frac{2}{p}=\frac{2p-2}{2p}$，解得 $p=3$.



7. A　如图，$\triangle ABC$ 内接圆的半径为 $\frac{BC}{2\sin\angle BAC}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，当 $\triangle ABC$ 为正三角形（$\triangle ABC$ 的面积最大）且 P,O,O_1 三点共线时，三棱锥的体积最大.



因为 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}(R+OO_1)=\frac{\sqrt{3}}{3}(R+OO_1)=\frac{\sqrt{3}}{2}R$，所以 $OO_1=\frac{1}{2}R$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OO_1A$ 中，由 $R^2=OO_1^2+(\frac{2\sqrt{3}}{3})^2$，得 $R^2=\frac{16}{9}$，故该球的表面积为 $\frac{64\pi}{9}$.

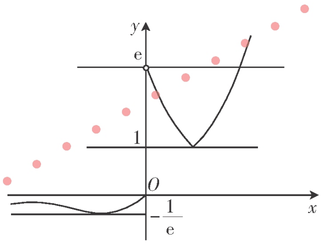
8. C　因为 $f'(x)=\frac{(x-1)\mathrm{e}^x}{x^2}-t(\frac{1}{x}+1)$，所以 $f''(x)=(\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})\mathrm{e}^x+\frac{t}{x^2}$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上为“凹函数”，所以在 $(0,2)$ 上 $f''(x)=(\frac{2}{x^3}-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x})\mathrm{e}^x+\frac{t}{x^2}>0$ 恒成立，即 $t>(2-\frac{2}{x}-x)\mathrm{e}^x$. 令 $g(x)=(2-\frac{2}{x}-x)\mathrm{e}^x$，$x\in(0,2)$，则 $g'(x)=\frac{(1-x)(x^2+2)}{x^2}\mathrm{e}^x$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(1)=-\mathrm{e}$，故 $t\in(-\mathrm{e},+\infty)$.

9. ABD　由题知 $q\Rightarrow t\Rightarrow s$，且 $s\Rightarrow q$，则 $q\Leftrightarrow t\Leftrightarrow s$，所以 B，D 正确. 因为 $q\Leftrightarrow t\Leftrightarrow s$，且 p 是 q 的充分不必要条件，所以 p 是 s 的充分不必要条件，t 是 p 的必要不充分条件，所以 A 正确，C 不正确.

10. AD　$f(x)$ 的图象如图所示，因为 $f(x)=a$ 有且仅有一个实数解，即 $y=f(x)$ 的图象与 $y=a$ 有且只有一个交点，所以 $a\in[\mathrm{e},+\infty)\cup\{1,0,-\frac{1}{\mathrm{e}}\}$. 又因为 $g(x)=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $a>0$，所以 $a\in[\mathrm{e},+\infty)\cup\{1\}$.



11. ACD　不妨设 2019 年全年的总成本为 t，则 2020 年全年的总成本为 $2t$.
该公司 2020 年原材料费用为 $0.3\times 2t=0.6t$，2019 年工资金额与研发费

1
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

自主选拔在线
微信号：zizzsw
专注名校自主选拔

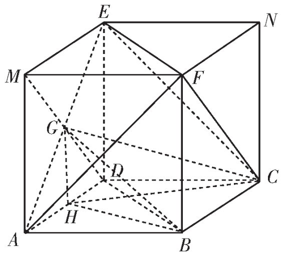
用的和为 $0.2t+0.1t=0.3t$，故 A 错误；

该公司 2020 年研发费用为 $0.25\times2t=0.5t$，2019 年工资金额、原材料费用、其他费用三项的和为 $0.2t+0.15t+0.15t=0.5t$，故 B 正确；

该公司 2020 年其他费用为 $0.05\times2t=0.1t$，2019 年工资金额为 $0.2t$，故 C 错误；

该公司 2020 年设备费用为 $0.2\times2t=0.4t$，2019 年原材料费用为 $0.15t$，故 D 错误.

12. ACD　如图，将几何体 $ABCDEF$ 补全成棱长为 2 的正方体.



在正方体中，因为 $CF/\!/DM$，$DM\perp AE$，所以 $AE\perp CF$，故 A 正确；

因为 $V_{ABCDEF}=V_{正方体}-2V_{F-AME}=8-2\times\frac{4}{3}=\frac{16}{3}$，所以 B 错误；

当 G 为线段 AE 的中点时，因为平面 $GBD/\!/$平面 CEF，所以 $GB/\!/$平面 CEF，故 C 正确；

过 G 作 AD 的垂线，垂足为 H，连接 HB，HC，

则 $BG^2+CG^2=AB^2+AG^2+CD^2+DG^2=8+AG^2+DG^2=8+AH^2+DH^2+2GH^2$，因为 $AH=GH$，所以 $BG^2+CG^2=8+DH^2+3AH^2=8+(2-AH)^2+3AH^2=4AH^2-4AH+12=4(AH-\frac{1}{2})^2+11$，当 $AH=\frac{1}{2}$ 时，BG^2+CG^2 取得最小值 11，故 D 正确.

13. $(x-4)^2+(y+3)^2=9$（答案不唯一）　设圆的方程为 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，则只要符合 $\begin{cases}3a+4b=0,\\ r=|b|\end{cases}$ 即可，如 $\begin{cases}a=4,\\ b=-3,\\ r=3.\end{cases}$

14. 1；$\frac{5\pi}{12}$　$f(x)=\cos(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6})\cos(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2})=-\cos(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6})\sin(\omega x+\varphi-\frac{\pi}{6})=-\frac{1}{2}\sin(2\omega x+2\varphi-\frac{\pi}{3})$. 因为 $f(x)$ 的最小正周期为 π，所以 $\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，得 $\omega=1$.

因为 $f(x)$ 为偶函数，所以 $2\varphi-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$. 因为 $\varphi\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\varphi=\frac{5\pi}{12}$.

15. 0 或 1　$x^2-3ax+2a^2=(x-a)(x-2a)$，当 $a=0$ 时，显然符合题意；当 $a<0$ 时，因为 $2a<a$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,2a)$，由 $a^2=2a$，得 $a=0$ 或 2，均不合题意；当 $a>0$ 时，因为 $2a>a$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,a)$，由 $a^2=a$，得 $a=0$（舍去）或 1. 综上，$a=0$ 或 1.

16. $\frac{2+2\sqrt{15}}{7}$　因为 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AF_1}$，所以 A 为 BF_1 的中点. 因为 $|AF_1|=\frac{c}{2}$，所以 $|BF_1|=c$.

因为 $\triangle BF_1F_2$ 是等腰三角形，且 $|F_1F_2|=2c$，所以 $AF_1\perp AF_2$. 因为 $AF_2=2a+\frac{c}{2}$，

所以 $\frac{c^2}{4}+(2a+\frac{c}{2})^2=4c^2$，所以 $2a=\frac{\sqrt{15}-1}{2}c$，故离心率 $e=\frac{2+2\sqrt{15}}{7}$.

17. 解：(1) 因为 $\frac{a_{n+1}+a_n}{a_n-a_{n-1}}=\frac{a_n+a_{n-1}}{a_{n+1}-a_n}$，所以 $a_{n+1}^2-a_n^2=a_n^2-a_{n-1}^2$，…… 1 分

即 $a_{n+1}^2+a_{n-1}^2=2a_n^2$. …… 2 分

因为 $a_1=1$，$a_2=2$，所以数列 $\{a_n^2\}$ 是首项为 1，公差为 3 的等差数列，…… 4 分

从而 $a_n^2=3n-2$. …… 5 分

因为 $a_n>0$，所以 $a_n=\sqrt{3n-2}$. …… 6 分

(2) 因为 $\frac{3}{a_n+a_{n+1}}=\frac{3}{\sqrt{3n-2}+\sqrt{3n+1}}=\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}$，…… 8 分

所以 $S_n=\sqrt{4}-\sqrt{1}+\sqrt{7}-\sqrt{4}+\sqrt{10}-\sqrt{7}+\cdots+\sqrt{3n+1}-\sqrt{3n-2}$，…… 9 分

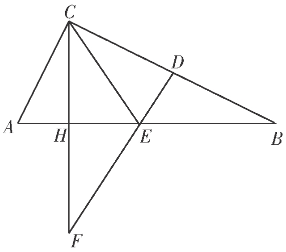
故 $S_n=\sqrt{3n+1}-1$. …… 10 分

18. 解：(1) 在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\angle ACB=90^\circ$，$\angle ABC=30^\circ$，$AC=2$，

2
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

所以 $AB=4$，$BD=DC=\sqrt{3}$. ………………………………………… 1 分

因为 $S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD\cdot BE\sin 30°=\frac{\sqrt{3}}{4}$，所以 $BE=1$. ………………………… 2 分



因为 $DE^2=BD^2+BE^2-2BD\cdot BE\cos 30°=1$，

所以 $DE=1$. ………………………………………… 3 分

因为 $CE^2=BC^2+BE^2-2BC\cdot BE\cos 30°=7$，

所以 $CE=\sqrt{7}$. ………………………………………… 4 分

在$\triangle CDE$中，由余弦定理得 $\cos\angle CED=\frac{CE^2+DE^2-CD^2}{2CE\cdot DE}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$. …… 6 分

(2)如图，过 C 作 AB 的垂线，垂足为 H，并延长使 $HF=CH$，连接 DF 交 AB 于 E，此时 $CE+DE$ 取得最小值 DF，即$\triangle CDE$的周长最小. ………… 8 分

在$\triangle ABC$中，因为 $CH=\sqrt{3}$，所以 $CF=2\sqrt{3}$.

在$\triangle CDF$中，因为 $DF^2=CF^2+CD^2-2CF\cdot CD\cos 60°=9$，

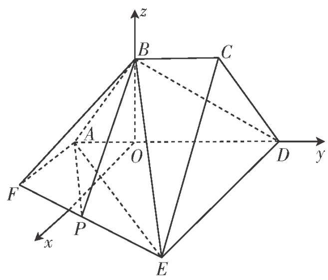
所以 $DF=3$. ………………………………………… 9 分

因为 $CD^2+DF^2=CF^2$，所以 $DF\perp BC$， ………………………………………… 10 分

所以 $DE/\!/AC$.

因为 D 为 BC 的中点，所以 E 为 AB 的中点，故$\frac{AE}{BE}=1$. ………………………… 12 分

19.(1)证明：在等腰梯形 $ABCD$ 中，$AB=BC=1$，$AD=2$，可得$\angle BAD=60°$. 在$\triangle ABD$中，由余弦定理可得 $BD=\sqrt{3}$，所以 $AB^2+BD^2=AD^2$，



所以 $AB\perp BD$. ………………………………………… 1 分

因为平面 $ABCD\perp$平面 $ADEF$ 且交于 AD，$DE\perp AD$，

所以 $DE\perp$平面 $ABCD$. ………………………………………… 2 分

又因为 $AB\subset$平面 $ABCD$，

所以 $AB\perp DE$. ………………………………………… 3 分

因为 $BD\cap DE=D$，

所以 $AB\perp$平面 BDE. ………………………………………… 4 分

又因为 $AB\subset$平面 ABE，

所以平面 $BDE\perp$平面 ABE. ………………………………………… 5 分

(2)解：如图，过 B 作 AD 的垂线交 AD 于 O，过 O 在平面 $ADEF$ 内作 AD 的垂线 Ox，建立空间直角坐标系 $O-xyz$， ………………………………………… 6 分

则 $A(0,-\frac{1}{2},0)$，$B(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$C(0,1,\frac{\sqrt{3}}{2})$，$D(0,\frac{3}{2},0)$，$E(2,\frac{3}{2},0)$，$F(1,-\frac{1}{2},0)$， …………………… 7 分

$\overrightarrow{FE}=(1,2,0)$，设$\overrightarrow{FP}=\lambda\overrightarrow{FE}$，则 $P(\lambda+1,2\lambda-\frac{1}{2},0)$. ………………………………………… 8 分

$\overrightarrow{DE}=(2,0,0)$，$\overrightarrow{DC}=(0,-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AB}=(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{AP}=(\lambda+1,2\lambda,0)$.

设平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=2x_1=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{2}y_1+\frac{\sqrt{3}}{2}z_1=0,\end{cases}$ 令 $z_1=1$，得 $\boldsymbol{m}=(0,\sqrt{3},1)$. ………………………… 9 分

设平面 PAB 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}y_2+\frac{\sqrt{3}}{2}z_2=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}=(\lambda+1)x_2+2\lambda y_2=0,\end{cases}$ 令 $z_2=1$，得 $\boldsymbol{n}=(\frac{2\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1},-\sqrt{3},1)$. ………………………… 10 分

3 官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

所以 $|\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{(\frac{2\sqrt{3}\lambda}{\lambda+1})^2+4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$， …… 11 分

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，即当 P 为 EF 的中点时满足题意. …… 12 分

20. 解：(1) $\bar{x}=30\times0.05+40\times0.1+50\times0.15+60\times0.35+70\times0.2+80\times0.15=60$， …… 2 分

$s^2=(-30)^2\times0.05+(-20)^2\times0.1+(-10)^2\times0.15+10^2\times0.2+20^2\times0.15=180$. …… 4 分

(2)①由(1)知 $X\sim N(60,180)$，

所以 $P(33.2<X<46.6)=P(\mu-2\sigma<X<\mu-\sigma)=\dfrac{0.9545-0.6827}{2}=0.1359$. …… 6 分

②分层抽样抽取的 7 人中年龄在 $[45,55)$，$[65,75)$ 内的分别有 3 人，4 人. …… 7 分

所以 Y 的可能取值为 0，1，2，3.

因为 $P(Y=0)=\dfrac{C_4^3}{C_7^3}=\dfrac{4}{35}$，$P(Y=1)=\dfrac{C_3^1C_4^2}{C_7^3}=\dfrac{18}{35}$，$P(Y=2)=\dfrac{C_3^2C_4^1}{C_7^3}=\dfrac{12}{35}$，$P(Y=3)=\dfrac{C_3^3C_4^0}{C_7^3}=\dfrac{1}{35}$， …… 10 分

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2	3
P	$\dfrac{4}{35}$	$\dfrac{18}{35}$	$\dfrac{12}{35}$	$\dfrac{1}{35}$

故 Y 的数学期望 $EY=1\times\dfrac{18}{35}+2\times\dfrac{12}{35}+3\times\dfrac{1}{35}=\dfrac{9}{7}$. …… 12 分

21. (1)解：由椭圆的定义知 $|PF_1|+|PF_2|=2a$，则 $|PF_2|=2a-1$. …… 1 分

由光学性质可知 PQ 是 $\angle F_1PF_2$ 的角平分线，所以 $\dfrac{|PF_1|}{|F_1Q|}=\dfrac{|PF_2|}{|F_2Q|}$.

因为 $c=1$，所以 $\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{2a-1}{2-\frac{1}{2}}$，得 $a=2$， …… 2 分

从而 $b=\sqrt{3}$， …… 3 分

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. …… 4 分

(2)证明：设直线 MN 的方程为 $x=my+1$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立方程组 $\begin{cases}x=my+1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1,\end{cases}$ 得 $(3m^2+4)y^2+6my-9=0$， …… 5 分

则 $y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\dfrac{9}{3m^2+4}$. …… 6 分

因为直线 MB 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$， …… 7 分

所以令 $x=4$，得 $G(4,\dfrac{2y_1}{x_1-2})$. …… 8 分

因为 $\overrightarrow{AN}=(x_2+2,y_2)$，$\overrightarrow{AG}=(6,\dfrac{2y_1}{x_1-2})$， …… 9 分

又 $6y_2-(x_2+2)\times\dfrac{2y_1}{x_1-2}=\dfrac{6y_2(my_1-1)-2y_1(my_2+3)}{my_1-1}=\dfrac{4my_1y_2-6(y_1+y_2)}{my_1-1}$

$=\dfrac{4m(-\frac{9}{3m^2+4})-6(-\frac{6m}{3m^2+4})}{my_1-1}=0$，所以 $\overrightarrow{AN}/\!/\overrightarrow{AG}$. …… 11 分

因为 $AN\cap AG=A$，所以 A,N,G 三点共线. …… 12 分

22. (1)解：$f'(x)=2x-a+\dfrac{2}{x}=\dfrac{2x^2-ax+2}{x}$. …… 1 分

4 官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

当 $\Delta=a^2-16\leqslant0$，即 $-4\leqslant a\leqslant4$ 时，$f'(x)\geqslant0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. ………………………………………………………… 2 分

当 $\Delta=a^2-16>0$，即 $a<-4$ 或 $a>4$ 时，

令 $2x^2-ax+2=0$，得 $x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-16}}{4}$.

当 $a<-4$ 时，两根均为负数，则 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；………………………………………………………… 3 分

当 $a>4$ 时，两根均为正数，

所以 $f(x)$ 在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{4})$，$(\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{4},+\infty)$ 上单调递增，

在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{4},\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{4})$ 上单调递减. ………………………………………… 4 分

综上所述，当 $a\leqslant4$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $a>4$ 时，$f(x)$ 在 $(0,\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{4})$，$(\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{4},+\infty)$ 上单调递增，在 $(\frac{a-\sqrt{a^2-16}}{4},\frac{a+\sqrt{a^2-16}}{4})$ 上单调递减. ………………………… 5 分

(2)证明：因为 $f(x_1)+f(x_2)=0$，所以 $x_1^2-ax_1+2\ln x_1-3+x_2^2-ax_2+2\ln x_2-3=0$，

整理得 $x_1^2+x_2^2-a(x_1+x_2)+2\ln x_1+2\ln x_2-6=0$，

即 $(x_1+x_2)^2-a(x_1+x_2)-6=2x_1x_2-2\ln(x_1x_2)$. ………………………………………… 6 分

令 $g(x)=2x-2\ln x$，则 $g'(x)=2-\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)}{x}$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $g(x)\geqslant g(1)=2$，即 $2x_1x_2-2\ln(x_1x_2)\geqslant2$. ………………………………………… 8 分

因为 $(x_1+x_2)^2-a(x_1+x_2)-6\geqslant2$，所以 $(x_1+x_2)^2-a(x_1+x_2)-8\geqslant0$.

因为 $h(a)=(x_1+x_2)^2-a(x_1+x_2)-8$ 在 $a\in[1,2]$ 上单调递减，

所以 $h(2)=(x_1+x_2)^2-2(x_1+x_2)-8\geqslant0$，………………………………………………… 10 分

即 $(x_1+x_2-4)(x_1+x_2+2)\geqslant0$.

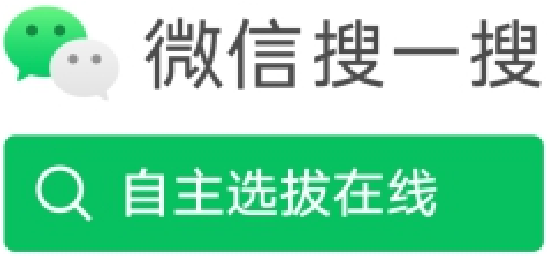
因为 $x_1,x_2>0$，所以 $x_1+x_2\geqslant4$. ……………………………………………………… 12 分

5
官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》