哈尔滨市第九中学 2023 届高三第二次模拟考试
数学试卷

（本试卷分为第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题），满分 150 分，考试时间 120 分钟。）

注意事项：

1．答题前，考生先将自己的姓名、学生代号填写清楚。

2．选择题必须使用 2B 铅笔填涂。

3．请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试题卷上答题无效。

第 I 卷(选择题　共 60 分)

一．单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. 已知集合 $A=\{x||x-3|<2\}$，$B=\left\{x|\frac{2x-1}{x-2}\le 1\right\}$，则 $A\cup B=$（　　）

A. $(1,2]$　　B. $(1,2)$　　C. $[-1,5]$　　D. $[-1,5)$

2. 命题“$\forall x\in[1,2], x^2-a\le 0$”是真命题的充要条件是（　　）

A. $a>4$　　B. $a\ge 4$　　C. $a<1$　　D. $a\ge 1$

3. 已知方程 $x^2+ax+b=0(a,b\in R)$ 在复数范围内有一根为 $2+3i$，其中 i 为虚数单位，则复数 $z=a+bi$ 在复平面上对应的点在（　　）

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

4. 已知随机变量 X,Y 分别满足 $X\sim B(8,p)$，$Y\sim N(\mu,\sigma^2)$，且期望 $E(X)=E(Y)$，又 $P(Y\ge 3)=\frac{1}{2}$，则 $p=$（　　）

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{3}{8}$　　D. $\frac{5}{8}$

5. 密位制是度量角的一种方法，把一周角等分为 6000 份，每一份叫作 1 密位的角．在角的密位制中，单位可省去不写，采用四个数码表示角的大小，在百位数与十位数之间画一条短线，如 7 密位写成“$0-07$”，578 密位写成“$5-78$”．若 $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2\sin\alpha\cos\alpha$，则角 α 可取的值用密位制表示正确的是（　　）

A. $11-50$　　B. $2-50$　　C. $13-50$　　D. $33-50$

6. 定义：两个正整数 a,b，若它们除以正整数 m 所得的余数相等，则称 a,b 对于模 m 同余，记作 $a=b(\bmod m)$，比如：$26=16(\bmod 10)$．已知 $n=C_{10}^0+C_{10}^1\cdot 8+C_{10}^2\cdot 8^2+\cdots+C_{10}^{10}\cdot 8^{10}$，满足 $n=p(\bmod 7)$，则 p 可以是（　　）

A. 23　　B. 31　　C. 32　　D. 19

7. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F_1，直线 $y=kx(k>0)$ 与双曲线 C 交于 P,Q 两点，且 $\angle PF_1Q=\dfrac{2\pi}{3}$，$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{F_1Q}=4$，则当 $\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{b^2}{a^2}$ 取得最小值时，双曲线的离心率为（　　）

A. 3　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $\sqrt{2}$

8. 已知 $a,b>1,b\neq a^2,a^{a^2+b}=b^{a^2}$，则（　　）

A. $(\ln b-\ln a)^2\leq\dfrac{b}{a^2}$　　B. $(\ln b-\ln a)^2\geq\dfrac{b}{a^2}$　　C. $b<a^2$　　D. $b>a^2$

二. 多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分。

9. 已知圆 $C:x^2+y^2+Dx+Ey+3=0$ 的圆心坐标为 $(2,0)$，则（　　）

A. $D=-4,E=0$

B. 圆 C 的半径为 2

C. 圆 C 上的点到直线 $y=\dfrac{3}{4}x$ 距离的最小值为 $\dfrac{1}{5}$

D. 圆 C 上的点到直线 $y=\dfrac{3}{4}x$ 距离的最小值为 $\dfrac{6}{5}$

10. 下列说法正确的是（　　）

A. 若事件 M,N 互斥，$P(M)=\dfrac{1}{2},P(N)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(M\cup N)=\dfrac{5}{6}$

B. 若事件 M,N 相互独立，$P(M)=\dfrac{1}{2},P(N)=\dfrac{1}{3}$，则 $P(M\cup N)=\dfrac{2}{3}$

C. 若 $P(M)=\dfrac{1}{2},P(\overline{M}|N)=\dfrac{3}{4},P(\overline{M}|\overline{N})=\dfrac{3}{8}$，则 $P(N)=\dfrac{1}{3}$

D. 若 $P(M)=\dfrac{1}{2},P(\overline{M}|N)=\dfrac{3}{4},P(\overline{M}|\overline{N})=\dfrac{3}{8}$，则 $P(N|M)=\dfrac{1}{4}$

11. 已知函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)(\omega>0)$，且 $f(x)\leq\left|f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)\right|$，$f(x)$ 的最小正周期 $T,\pi<T<2\pi$，则（　　）

A. $\omega=\dfrac{5}{6}$　　B. $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=1$　　C. $f\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 为奇函数　　D. $f(x)$ 关于 $\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$ 对称

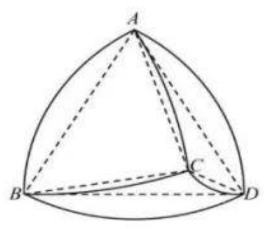
12. 数学中有许多形状优美，寓意独特的几何体，“勒洛四面体”就是其中之一. 勒洛四面体是以正四面体的四个顶点为球心，以正四面体的棱长为半径的四个球的公共部分. 如图，在勒洛四面体中，正四面体 $ABCD$ 的棱长为 4，则下列结论正确的是（　　）

A. 勒洛四面体最大的截面是正三角形

B. 若 P,Q 是勒洛四面体 $ABCD$ 表面上的任意两点，则 PQ 的最大值为 4

C. 勒洛四面体 $ABCD$ 的体积是 $8\sqrt{6}\pi$

D. 勒洛四面体 $ABCD$ 内切球的半径是 $4-\sqrt{6}$



第 II 卷（非选择题　共 90 分）

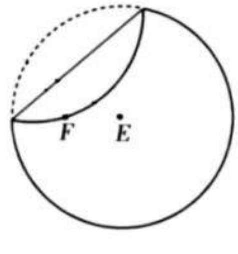
三．填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

13. 已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_3=4,a_7=16$，则$a_5=$________

14. 设平面向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，且$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$上的投影向量是__________

15. 一组数据为 148，150，151，153，153，154，155，156，156，158，163，165，则这组数据的第 75 百分位数是______

16. “工艺折纸”是一种把纸张折成各种不同形状物品的艺术活动，在我国源远流长，某些折纸活动蕴含丰富的数学内容. 例如，用一张圆形纸片，按如下步骤折纸（如下图）.



步骤 1：设圆心是E，在圆内异于圆心处取一点，标记为F；
步骤 2：把纸片折叠，使圆周正好经过点F；
步骤 3：把纸片展开，并留下一道折痕；
步骤 4：不停重复步骤 2 和步骤 3，就能得到越来越多的折痕.
圆面上所有这些折痕围成一条曲线，记为C.
现有半径为 4 的圆形纸片，定点F到圆心E的距离为 2，按上述方法折纸，在C上任取一点M，O为线段EF的中点，则$|OM|$的最小值为__________

四．解答题：本题共 6 小题，满分 70 分（17 题 10 分，18 题至 22 题 12 分）。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. ΔABC的内角A,B,C所对的边分别为a,b,c，已知$2b^2=(b^2+c^2-a^2)(1-\tan A)$

（1）求角C；

（2）若$c=2\sqrt{10}$，D为BC中点，$\cos B=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，求$AD$的长.

18. 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\dfrac{2}{3}$，且满足$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{a_n+1}$.

（1）求证：数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$为等比数列；

（2）设数列$\{b_n\}$满足$b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n}-1, n\text{为偶数}\\ \dfrac{n+2}{n}+\dfrac{n}{n+2}-2, n\text{为奇数}\end{cases}$，

若$b_1+b_2+\cdots+b_{2k}<m$对一切正整数k均成立，求实数m的最小值.

19. 为调查某地区植被覆盖面积x（单位：公顷）和野生动物数量y的关系，某研究小组将该地区等面积划分为 200 个区块，从中随机抽取 20 个区块，得到样本数据$(x_i,y_i)(i=1,2,\cdots,20)$，部分数据如下：

x	…	2.7	3.6	3.2	…
y	…	57.8	64.7	62.6	…

经计算得：$\sum_{i=1}^{20} x_i = 60, \sum_{i=1}^{20} y_i = 1200, \sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})^2 = 80, \sum_{i=1}^{20}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 640$.

（1）利用最小二乘法估计建立 y 关于 x 的线性回归方程 l_1；

（2）该小组又利用这组数据建立了 x 关于 y 的线性回归方程 l_2，并把这两条拟合直线画在同一坐标系 xOy 下，横坐标 x，纵坐标 y 的意义与植被覆盖面积 x 和野生动物数量 y 一致，

（i）求这两条直线的公共点坐标.

（ii）比较 l_1 与 l_2 的斜率大小，并证明；附：y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中，

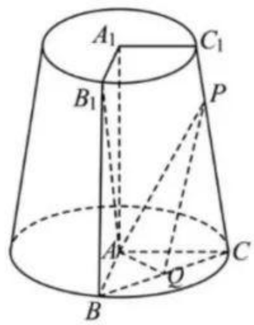
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}, \quad r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}$$

20. 已知函数 $f(x) = e^{\sin x} - (x+1)$

（1）求函数 $y = f(x)$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2}, f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）证明：函数 $y = f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上有且只有一个零点.

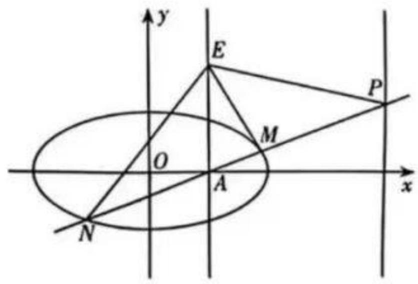
21. 在直角梯形 AA_1B_1B 中，$A_1B_1 // AB, AA_1 \perp AB, AB = AA_1 = 2A_1B_1 = 6$，直角梯形 AA_1B_1B 绕直角边 AA_1 旋转一周得到如下图的圆台 AA_1，已知点 P,Q 分别在线段 CC_1, BC 上，二面角 $B_1 - AA_1 - C_1$ 的大小为 θ.



（1）若 $\theta = \frac{2\pi}{3}, \overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}, AQ \perp AB$，证明：$PQ //$ 平面 AA_1B_1B；

（2）若 $\theta = \frac{\pi}{2}$，点 P 为 CC_1 上的动点，点 Q 为 BC 的中点，求 PQ 与平面 AA_1C_1C 所成最大角的正切值，并求此时二面角 $Q - AP - C$ 的余弦值.

22. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{b^2} = 1(0 < b < 2)$，设过点 $A(1,0)$ 的直线 l 交椭圆 C 于 M,N 两点，交直线 $x = 4$ 于点 P，点 E 为直线 $x = 1$ 上不同于点 A 的任意一点.



（1）若 $|AM| \geq 1$，求 b 的取值范围；

（2）若 $b = 1$，记直线 EM, EN, EP 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3，问是否存在 k_1, k_2, k_3 的某种排列 $k_{i_1}, k_{i_2}, k_{i_3}$（其中 $\{i_1, i_2, i_3\} = \{1,2,3\}$），使得 $k_{i_1}, k_{i_2}, k_{i_3}$ 成等差数列或等比数列？若存在，写出结论，并加以证明；若不存在，说明理由.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。