蒙城一中　涡阳一中　淮南一中　怀远一中　颍上一中
2023届高三第二次五校联考·数学
参考答案、提示及评分细则

一、选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	C	A	D	A	D	B

1.【答案】A

【解析】$M=\{x\mid |x|=x,x\in\mathbf{R}\}=[0,+\infty)$，$\complement_{\mathbf{R}}M=(-\infty,0)$.

2.【答案】B

【解析】法一：$\because z=1-\mathrm{i}$，$\therefore 1-\mathrm{i}+\dfrac{b}{1-\mathrm{i}}-a=1-\mathrm{i}+\dfrac{b(1+\mathrm{i})}{2}-a=1-a+\dfrac{b}{2}+\left(-1+\dfrac{b}{2}\right)\mathrm{i}=0$，

$\therefore\begin{cases}1-a+\dfrac{b}{2}=0,\\-1+\dfrac{b}{2}=0,\end{cases}$ $a=2,b=2,a+b=4$.

法二：韦达定理：$z+\dfrac{b}{z}-a=0$，$\therefore z^2-az+b=0$，$a=2,b=2,a+b=4$.

3.【答案】C

【解析】$\because(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=-1$，$\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2=-1$，$\therefore|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$. $\because\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1$，$\therefore\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{1}{2}$，$\theta\in[0,\pi]$，则$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，令向量$a$与$c$的夹角为$\theta$，则$\theta=\pi-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3\pi}{4}$.

4.【答案】A

5.【答案】D

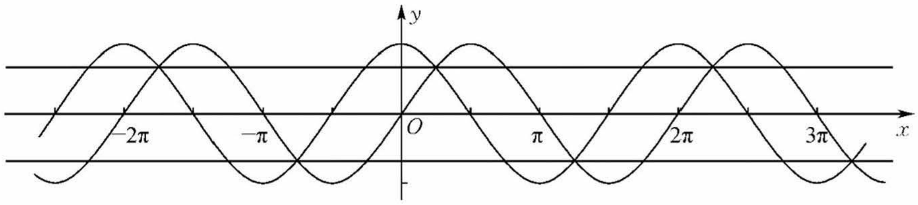
6.【答案】A

【解析】直线在y轴上截距之和为零.

7.【答案】D

8.【答案】B

【解析】由$2m^2-2\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot m+\sin 2x\leqslant0$，得$m^2-(\sin x+\cos x)\cdot m+\sin x\cdot\cos x\leqslant0$，即$(m-\sin x)(m-\cos x)\leqslant0$的几何意义可知，函数$y=m$的图像在函数$y=\sin x$，$y=\cos x$的图象之间，如图所示，要使$b-a$达到最大，仅需要$m=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$或$m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，此时$b-a=\pi$.



二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

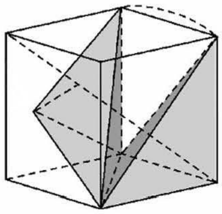
题号	9	10	11	12
答案	BC	BCD	AD	AB

9.【答案】BC

10.【答案】BCD

11.【答案】AD

【解析】放置到到正方体中解决.



12.【答案】AB

【解析】法一：通过过原点的直线与三个函数图像交点来解决问题.

法二：通过构造函数、用导数结合函数的性质及$\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}=\frac{e^{1-\beta}}{\beta}=\frac{e\gamma-1}{\gamma}>0$进行求解.

设$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$，$f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$，当$x>1$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为减函数；当$0<x<1$时，$f'(x)>0$，$f(x)$为增函数；所以$f(x)$的最大值为$f(1)=1$，即$0<\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}=\frac{e^{1-\beta}}{\beta}=\frac{e\gamma-1}{\gamma}\leqslant 1$. 因为$\frac{e^{1-\beta}}{\beta}>0$，所以$\beta>0$. 设$g(x)=\frac{e^{1-x}}{x}(x>0)$，$g'(x)=-\frac{(x+1)e^{1-x}}{x^2}<0$，所以当$x>0$时，$g(x)$为减函数；因为$g(1)=1$，$g(\beta)\leqslant 1=g(1)$，所以$\beta\geqslant 1$. 由$0<\frac{e\gamma-1}{\gamma}\leqslant 1$可得$\frac{1}{e}<\gamma\leqslant\frac{1}{e-1}$，所以$\beta>\gamma$，故 B 正确.

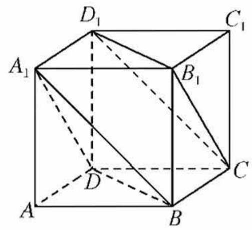
设$\varphi(x)=\ln x-ex+2$，$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-e$，当$x>\frac{1}{e}$时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$为减函数；当$0<x<\frac{1}{e}$时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$为增函数；所以$\varphi(x)$的最大值为$\varphi\left(\frac{1}{e}\right)=0$，所以$\varphi(x)\leqslant 0$，即$\ln x\leqslant ex-2$. $\frac{e\gamma-1}{\gamma}=\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}\leqslant\frac{1+e\alpha-2}{\alpha}=\frac{e\alpha-1}{\alpha}$. 设$h(x)=\frac{ex-1}{x}=e-\frac{1}{x}$，易知$h(x)$为增函数，由$h(\gamma)\leqslant h(\alpha)$可得$\alpha>\gamma$，故 A 正确.

因为$g(x)=\frac{e^{1-x}}{x}(x>0)$为单调递减函数，$f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$在$(0,1)$上是增函数，在$(1,+\infty)$上是减函数，且$g(x)$的图象经过$f(x)$图象的最高点，所以当$\frac{1+\ln\alpha}{\alpha}=\frac{e^{1-\beta}}{\beta}>0$时，$\alpha,\beta$的大小无法得出. 令$\alpha=e$，则$\frac{2}{e}=\frac{e^{1-\beta}}{\beta}$，得$\beta e^{\beta}=\frac{e^2}{2}<\frac{e}{2}\cdot e^{\frac{e}{2}}$，易知$y=xe^x$在$(0,+\infty)$为增函数，所以$\beta<\frac{e}{2}$，所以$2\beta\geqslant\alpha+\gamma$不成立，同样知$2\beta\geqslant\alpha-\gamma$不成立，故 C、D 不正确. 故选 AB.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.【答案】0.03

14.【答案】37，38，等[在区间(36，180)内的均可以]



【解析】将该容器任意放置均不能使水平面呈三角形，则如图，水最少的临界情况为，水面为面 A_1BD，水最多的临界情况为多面体 $ABCDA_1B_1D_1$，水面为 BC_1D_1，因为 $V_{A-A_1BD}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times6\times6\times6=36$，$V_{ABCDA_1B_1D_1}=V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}-V_{C-B_1C_1D_1}=6^3-36=180$，所以 $36<V<180$，即 $V\in(36,180)$.

15.【答案】$\frac{\sqrt{15}}{3}$

【解析】$S_{ABCD}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|CD|=2\sqrt{(3c^2-d_1{}^2)(3c^2-d_2{}^2)}=\sqrt{151}b^2$，$\therefore 9c^4-3c^2(d_1{}^2+d_2{}^2)+d_1{}^2\cdot d_2{}^2=\frac{151b^4}{4}$，$\because |PF_1|=2d_1$，$|PF_2|=2d_2$，且 $PF_1\perp PF_2$，$\therefore d_1{}^2+d_2{}^2=c^2$，$d_1d_2=\frac{b^2}{2}$，$4c^4=25b^4$，即 $2c^2=5b^2$，令 $b^2=2$，则 $c^2=5$，$a^2=3$，$\left(\frac{b}{a}\right)^2=\frac{2}{3}$，双曲线的离心率为$\frac{\sqrt{15}}{3}$.

16.【答案】6(或 496，8128，33550336 等)　5280

【解析】用枚举法：$\sigma(6)=1+2+3=6$，$2160=2^4\times3^3\times5$，2160 的所有真因数的个数为 $5\times4\times2-1=39$，$\sigma(2160)=(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)(3^0+3^1+3^2+3^3)(5^0+5^1)-2160=7440-2160=5280$.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.【解析】(1)由$\triangle ACF\cong\triangle ABD\cong\triangle BCE$ 知，$\angle ACF=\angle BAD$，$\triangle DEF$ 为正三角形，$\angle AFC=120°$

$\because \sin\angle BAD=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，

$\therefore \sin\angle ACF=\frac{3\sqrt{3}}{14}$，$\cos\angle ACF=\frac{13}{14}$，

$\sin\angle CAF=\sin(60°-\angle ACF)=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{13}{14}-\frac{1}{2}\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$. ………………………………………… 5 分

(2)设 $AF=DB=t(t>0)$，则 $AD=2+t$

由正弦定理：$\frac{BD}{\sin\angle BAD}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$，即$\frac{t}{\frac{3\sqrt{3}}{14}}=\frac{AB}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$，则 $AB=\frac{7}{3}t$

$\triangle ABD$ 中，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cdot\cos\angle ADB$

即$\frac{49}{9}t^2=t^2+(2+t)^2-2t(2+t)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$，则 $t=3$，$AB=7$，$S_{\triangle ABC}=\frac{49\sqrt{3}}{4}$. ………………………… 10 分

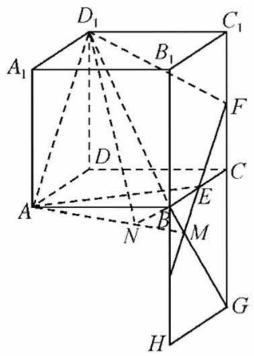
18.【解析】(1)$\because EF\parallel BC_1$，$BC_1\parallel AD_1$，$\therefore EF\parallel AD_1$，

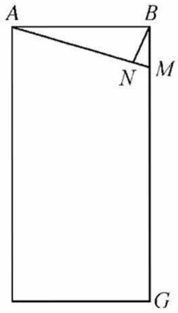
$\therefore A,E,F,D_1$ 四点共面，……………………………………………………………………… 2 分

易知多面体 $CEFADD_1$ 是一个三棱台，

$V_{三棱台CEF-DAD_1}=\frac{1}{3}(S_{\triangle CEF}+S_{\triangle DAD_1}+\sqrt{S_{\triangle CEF}\cdot S_{\triangle DAD_1}})\cdot CD$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+2+\sqrt{\frac{1}{2}\times2}\right)\times2=\frac{7}{3}$；…………………………………………………………… 6 分





(2)法一:解析法略 ······ 12 分

法二:如图,分别延长 B_1B, C_1C 到 H, G 点,使 $CG=BH=2$,

连接 BG 交 FE 的延长线于 M 点,连接 AM,

作 $BN\perp AM$,连接 D_1N,

$\because BG/\!/B_1C, EF\perp B_1C, \therefore EF\perp BG$,

$\because EF\perp AB, \therefore EF\perp$平面 ABM,

$\because EF\subseteq$平面 $AEFD_1$,$\therefore$平面 $AEFD_1\perp$平面 ABM, ······ 8 分

$\because$平面 $AEFD_1\cap$平面 $ABM=AM$,且 $BN\perp AM$,

$\therefore BN\perp$平面 ABM,

$\therefore\angle BD_1N$ 为直线 BD_1 和平面 $AEFD_1$ 所成角, ······ 10 分

在 $Rt\triangle BD_1N$ 中,$AB=2, BM=\frac{1}{4}BG=\frac{\sqrt{2}}{2}, AM=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,

由等面积可知 $AB\cdot BM=BN\cdot AM, \therefore BN=\frac{2}{3}$

在$\triangle BD_1N$ 中,$\angle BND_1=90^\circ, BD_1=2\sqrt{3}, BN=\frac{2}{3}$,

$\therefore\sin\angle BD_1N=\frac{BN}{BD_1}=\frac{\sqrt{3}}{9}$. ······ 12 分

19.【解析】(1)由题意知:第 n 次抛沙包后的抛沙包方法数为 2^n,

第 $n+1$ 次抛沙包后沙包在甲手中的方法数为 a_{n+1},若第 n 次抛沙包后沙包在甲手中,则第 $n+1$ 次抛沙包后,沙包不可能在甲手里,只有第 n 次抛沙包后沙包在乙或丙手中,

故 $a_{n+1}=a_n\times0+(2^{n+1}-a_n)\times1=2^{n+1}-a_n$,且 $a_1=0$

故 $a_{n+1}+a_n=2^{n+1}$,数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ 为等比数列,

由 $a_n+a_{n-1}=2^n$,得$(-1)^na_n-(-1)^{n-1}a_{n-1}=(-2)^n$

$(-1)^{n-1}a_{n-1}-(-1)^{n-2}a_{n-2}=(-2)^{n-1}$

…

$(-1)^2a_2-(-1)^1a_1=(-2)^2$

以上各式相加,可得 $a_n=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}$; ······ 6 分

(2)由题意知:第 n 次抛沙包后沙包在乙、丙手中的情况数相等均为 b_n,

则 $a_n+2b_n=2^n$,

$\because$ 当 n 为偶数时，$a_n=\frac{2^n+2(-1)^n}{3}=\frac{2^n+2}{3}>\frac{2^n}{3}$，$b_n=\frac{2^n-a_n}{2}<\frac{2^n}{3}$

$\therefore a_n>b_n$. …… 12 分

20.【解析】(1) $\overline{x}=\frac{160}{40}=4$，$\overline{y}=\frac{2400}{40}=60$，$\hat{b}=\frac{1280}{160}=8$，$\hat{a}=60-32=28$，故回归方程为 $\hat{y}=8x+28$；

…… 4 分

(2) x 关于 y 的线性回归方程为 $\hat{x}=\hat{a}_1+\hat{b}_1y$，$\hat{b}_1=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\overline{y})^2}$

$k_1=\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2}$，$k_2=\frac{1}{\hat{b}_1}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2}{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}$，…… 6 分

则 $\frac{k_1}{k_2}=\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{20}(x_i-\overline{x})^2\sum\limits_{i=1}^{20}(y_i-\overline{y})^2}=r^2$，$r$ 为 y 与 x 的相关系数， …… 8 分

又 $|r|\leqslant 1$，$k_1,k_2>0$，故 $\frac{k_1}{k_2}\leqslant 1$，即 $k_1\leqslant k_2$，…… 10 分

下证：$k_1\neq k_2$，

若 $k_1=k_2$，则 $|r|=1$，即 $y_i=8x_i+28(i=1,2,\cdots,20)$ 恒成立，

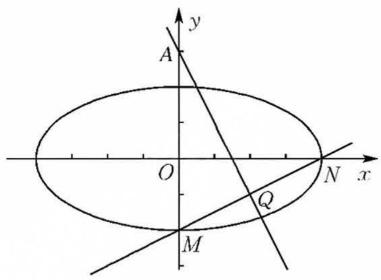
代入表格中的一组数据得：$50.6\neq 8\times 2.7+28$，矛盾，

故 $k_1<k_2$. …… 12 分

21.【解析】(1) 由 $x^2+y^2+2\sqrt{3}x=0$，得 $F_1(-\sqrt{3},0)$，$\therefore c=\sqrt{3}$，

$\because\triangle ABF_1$ 的周长为 8，$\therefore 4a=8$，$a=2$，

$\therefore b^2=a^2-c^2=1$，椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$； …… 4 分



(2) 设线段 MN 的中点 $Q(x_0,y_0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由直线 $l:kx-y+\frac{3}{2}=0$，且 $l\perp MN$，

设 $l_{MN}:x=-ky+m$，则联立 $\begin{cases}x=-ky+m,\\x^2+4y^2=4,\end{cases}$

得 $(k^2+4)y^2-2kmy+m^2-4=0$

$\Delta=(2km)^2-4(k^2+4)(m^2-4)=16(k^2+4-m^2)$

$y_1+y_2=\frac{2km}{k^2+4}$，$y_1y_2=\frac{m^2-4}{k^2+4}$

$x_1x_2=m^2-km(y_1+y_2)+k^2y_1y_2$

$\because OM\perp ON$，

$\therefore\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，即 $m^2-km(y_1+y_2)+(k^2+1)y_1y_2=0$

$\therefore 5m^2=4(k^2+1)$ ① …… 7 分

$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{4}+y_1^2=1,\\ \dfrac{x_2^2}{4}+y_2^2=1,\end{cases}$ 得 $\dfrac{x_1^2-x_2^2}{4}+y_1^2-y_2^2=0$,

即 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=0$, $\therefore\dfrac{1}{k}\cdot\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{1}{4}$,

$\because\dfrac{1}{k}=\dfrac{x_0}{y_0-\dfrac{3}{2}}$, $\dfrac{y_1+y_2}{x_1+x_2}=\dfrac{y_0}{x_0}$, $\therefore\dfrac{y_0}{y_0-\dfrac{3}{2}}=\dfrac{1}{4}$, 得 $2y_0=-1$,

$\therefore\dfrac{2km}{k^2+4}=-1$ ② …………………………………………………………………… 10 分

联立①②,消去 m 得, $11k^4-24k^2-80=0$,

$\therefore k^2=4, k=\pm2$, $\therefore\begin{cases}k=2,\\ m=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-2,\\ m=2,\end{cases}$

经验证,满足 $\Delta>0$, $\therefore k=\pm2$. …………………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1) $f(x)=a^x+b^{1-x}=e^{x\ln a}+e^{(1-x)\ln b}$,

$f'(x)=g(x)=e^{x\ln a}\ln a-e^{(1-x)\ln b}\ln b$

$g'(x)=e^{x\ln a}\ln^2 a+e^{(1-x)\ln b}\ln^2 b>0$

$\therefore g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增,得 $g(x)\leqslant g(b)=a^b\ln a-b^{1-b}\ln b$

要证: $g(b)\leqslant0$

只需证: $a^b\ln a\leqslant b^{1-b}\ln b$. 即 $a^{1-a}\ln a\leqslant b^{1-b}\ln b$

即证: $\dfrac{\ln a^a}{a^a}\leqslant\dfrac{\ln b^b}{b^b}$

令 $\varphi(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x\in(0,1)$, $\varphi'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}>0$

$\therefore\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增

故证 $a^a\leqslant b^b$,即 $a\ln a\leqslant b\ln b=(1-a)\ln(1-a)$

令 $h(x)=x\ln x-(1-x)\ln(1-x)$, $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, $h'(x)=\ln[e^2(x-x^2)]$

$h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\ln\dfrac{e^2}{4}>0$, $h'\left(\dfrac{1}{10}\right)=\ln\dfrac{9e^2}{100}<0$, $h'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增

$\therefore$ 存在唯一 $x_0\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 使 $h'(x_0)=0$

$h(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减,在 $\left(x_0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递增

$\therefore h(x)\leqslant\max\{h(0),h(1)\}=0$

$\therefore a^a\leqslant b^b$,故原不等式成立,即 $g(b)\leqslant0$; ……………………………………………………… 8 分

(2)由(1)知, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减

$\therefore f(b)\leqslant f\left(\dfrac{1}{2}\right)\leqslant f(a)$,即 $a^b+b^a\leqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant a^a+b^b$

由于 $m+n=1$,且 m,n 为正实数,不妨令 $0<m\leqslant\dfrac{1}{2}\leqslant n<1$

$\therefore m^n+n^m\leqslant\sqrt{m}+\sqrt{n}\leqslant m^m+n^n$. …………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。