数学五

参考答案、提示及评分细则

1. A　由题意知$\frac{z}{z\bar{z}+\mathrm{i}}=\frac{1+\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})+\mathrm{i}}=\frac{(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\mathrm{i}$. 故选 A.

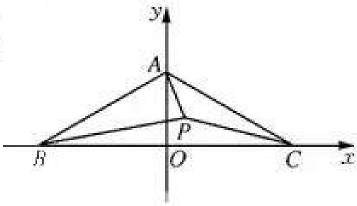
2. D　$A=\{x||x-1|\leqslant 2\}=[-1,3]$，$B=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-x-6>0\}=\{x\in\mathbf{Z}|x>3$ 或 $x<-2\}$，所以 $A\cap(\complement_U B)=[-1,3]$. 故选 D. 来源：高三答案公众号

3. B　方程$\frac{x^2}{3k+6}+\frac{y^2}{2-k}=1$表示椭圆，则$\begin{cases}3k+6>0,\\2-k>0,\\3k+6\neq 2-k,\end{cases}$ 解得$-2<k<-1$或$-1<k<2$，所以"$-2<k<2$"是"方程$\frac{x^2}{3k+6}+\frac{y^2}{2-k}=1$表示椭圆"的必要不充分条件. 故选 B.

4. D　双曲线 $y^2-\frac{x^2}{m^2}=1(m>0)$的渐近线为 $y=\pm\frac{x}{m}$，即 $x\pm my=0$，不妨取 $x+my=0$，圆 $x^2+y^2-6y+1=0$，即 $x^2+(y-3)^2=8$，所以圆心为$(0,3)$，半径 $r=2\sqrt{2}$，依题意圆心$(0,3)$到渐近线 $x+my=0$ 的距离 $d=\frac{|3m|}{\sqrt{1+m^2}}=2\sqrt{2}$，解得 $m=2\sqrt{2}$ 或 $m=-2\sqrt{2}$（舍去）. 故选 D.

5. A　设 $P(x,y)$，所以$|PA|^2+|PB|^2=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=10$，即 $x^2+y^2=4$，又点 P 在圆 C 上，所以 $1\leqslant\sqrt{(2a)^2+(3-a)^2}\leqslant 3$，解得 $0\leqslant a\leqslant\frac{6}{5}$，即 a 的取值范围是$\left[0,\frac{6}{5}\right]$. 故选 A.

6. C　在$\triangle ABC$中，由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\angle BAC$，即 $12=4+AC^2-2\times 2AC\cos 120^\circ$，解得 $AC=2$，取 BC 的中点 O，连接 AO，则 $AO\perp BC$，以 O 为坐标原点，BC 为 x 轴，OA 为 y 轴，建立平面直角坐标系，如图所示. 所以 $A(0,1)$，$B(-\sqrt{3},0)$，$C(\sqrt{3},0)$，设 $P(x,y)$，所以$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(-x,1-y)+(-\sqrt{3}-x,-y)=(-2x-\sqrt{3},-2y+1)$，$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=(-x,1-y)+(\sqrt{3}-x,-y)=(-2x+\sqrt{3},-2y+1)$，所以$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})=4x^2+(2y-1)^2-3\geqslant-3$，当且仅当 $x=0$，$y=\frac{1}{2}$时等号成立，即$(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC})$的最小值是$-3$. 故选 C.



7. C　抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点 $F(2,0)$，因为 $l_1\perp l_2$，所以直线 l_1，l_2 斜率存在，且均不为 0. 设直线 l_1 的方程为 $y=k(x-2)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}y^2=8x,\\y=k(x-2),\end{cases}$得 $k^2x^2-4(k^2+2)x+4k^2=0$，所以 $x_1+x_2=\frac{4(k^2+2)}{k^2}$，所以$|AB|=x_1+x_2+4=\frac{8(k^2+1)}{k^2}=8+\frac{8}{k^2}$，同理可得$|DE|=8+8k^2$，所以$|AB|+\frac{9}{4}|DE|=8+\frac{8}{k^2}+\frac{9}{4}(8+8k^2)=26+\frac{8}{k^2}+18k^2\geqslant 26+2\sqrt{\frac{8}{k^2}\cdot 18k^2}=50$，当且仅当$\frac{8}{k^2}=18k^2$，即 $k=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$时取等号，故$|AB|+\frac{9}{4}|DE|$的最小值是 50. 故选 C.

8. D　当 $a\leqslant 0$ 时，对任意的 $x>0$，$f(x)=x^2-2(a+1)x+a^2+3$ 在$(0,+\infty)$上至多有 2 个零点，不合题意，所以 $a>0$. 函数 $y=x^2-2(a+1)x+a^2+3$ 的对称轴为直线 $x=a+1$，$\Delta=4(a+1)^2-4(a^2+3)=8a-8$，所以 $f(x)$在$[a,a+1)$上单调递减，在$(a+1,+\infty)$上单调递增，且 $f(a)=3-2a$. 当 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2+3)=8a-8<0$，即 $0<a<1$ 时，则 $f(x)$在$[a,+\infty)$上无零点，所以 $f(x)=\sin\left[2\pi\left(x-a+\frac{1}{3}\right)\right]$在$(0,a)$上恰有 5 个零点，当 $0<x<a$ 时，$\frac{1}{3}-a<x-a+\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$，则 $2\pi\left(\frac{1}{3}-a\right)<2\pi\left(x-a+\frac{1}{3}\right)<\frac{2\pi}{3}$，由题意可得$-5\pi\leqslant 2\pi\left(\frac{1}{3}-a\right)<-4\pi$，解得$\frac{7}{3}<a\leqslant\frac{17}{6}$，此时 a 不存在；当 $\Delta=0$，即 $a=1$ 时，$f(x)$在$[1,+\infty)$上只有一个零点，当 $x\in(0,1)$时，$f(x)=\sin\left(2\pi x-\frac{4\pi}{3}\right)$，又$-\frac{4\pi}{3}<2\pi x-\frac{4\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，则 $f(x)$在$(0,1)$上只有 2

个零点，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的零点个数为 3，不合题意；当 $\begin{cases} f(a)=3-2a\geqslant 0, \\ \Delta=8a-8>0, \end{cases}$ 即 $1<a\leqslant\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有 2 个零点，则 $f(x)=\sin\left[2\pi\left(x-a+\frac{1}{3}\right)\right]$ 在 $(0,a)$ 上有 3 个零点，则 $-3\pi\leqslant 2\pi\left(\frac{1}{3}-a\right)<-2\pi$，解得 $\frac{4}{3}<a\leqslant\frac{11}{6}$，所以 $\frac{4}{3}<a\leqslant\frac{3}{2}$；当 $\begin{cases} f(a)=3-2a<0, \\ \Delta=8a-8>0, \end{cases}$ 即 $a>\frac{3}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有 1 个零点，则 $f(x)=\sin\left[2\pi\left(x-a+\frac{1}{3}\right)\right]$ 在 $(0,a)$ 上有 4 个零点，则 $-4\pi\leqslant 2\pi\left(\frac{1}{3}-a\right)<-3\pi$，解得 $\frac{11}{6}<a\leqslant\frac{7}{3}$，所以 $\frac{11}{6}<a\leqslant\frac{7}{3}$. 综上，$a$ 的取值范围是 $\left(\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right]\cup\left(\frac{11}{6},\frac{7}{3}\right]$. 故选 D.

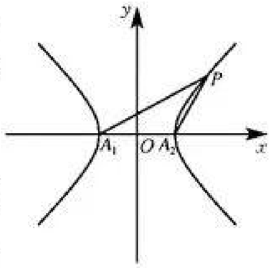
9. AC　因为 $3\times(-8)-(-4)\times 6=0$，所以 $l_1 // l_2$，且直线 l_1 与直线 l_2 之间的距离 $d=\frac{\left|1-\left(-\frac{3}{2}\right)\right|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{1}{2}$. 设直线 l_1 的倾斜角为 α，所以 $\tan\alpha=\frac{3}{4}$，又 $|MN|=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 或 $\frac{3\pi}{4}+\alpha$. 当直线 l 的倾斜角为 $\frac{\pi}{4}+\alpha$ 时，$\tan\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\alpha}=7$，所以直线 l 的方程为 $y=7x+2$，即 $7x-y+2=0$. 当直线 l 的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}+\alpha$ 时，$\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\tan\frac{3\pi}{4}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{3\pi}{4}\tan\alpha}=-\frac{1}{7}$，所以直线 l 的方程为 $y=-\frac{1}{7}x+2$，即 $x+7y-14=0$. 故选 AC.

10. AD　$f(x)=\left(\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}\cos^2\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{1+\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $f(x)$ 的最小正周期为 2π，故 A 正确；当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ 时，$x+\frac{\pi}{6}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{6}\right)$，所以 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{2\pi}{3}\right)$ 上单调递减，故 B 错误；$f\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以点 $\left(-\frac{2\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 图象的一个对称中心，故 C 错误；将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}$，关于 y 轴对称，故 D 正确. 故选 AD.

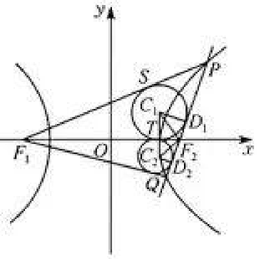
11. ACD　设圆心 C 到直线 AB 的距离为 d，由题意得 $0\leqslant d\leqslant\sqrt{2}$，$|AB|=2\sqrt{9-d^2}$，所以 $|AB|_{\min}=2\sqrt{9-2}=2\sqrt{7}$，故 A 正确；$\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{9-d^2}\cdot d=\sqrt{9d^2-d^4}=\sqrt{-\left(d^2-\frac{9}{2}\right)^2+\frac{81}{4}}$，当 $d^2=2$ 时，$(S_{\triangle ABC})_{\max}=\sqrt{14}$，故 B 错误；取 MN 的中点 E，又 $|MN|=4\sqrt{2}$，则 $|CE|=\sqrt{9-8}=1$，即点 E 的轨迹为圆 $(x-1)^2+y^2=1$，所以 $|\overrightarrow{PE}|_{\min}=|PC|-1=\sqrt{2}-1$，$|\overrightarrow{PE}|_{\max}=|PC|+1=\sqrt{2}+1$. 因为 $|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}|=2|\overrightarrow{PE}|$，所以 $|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}|$ 的最小值为 $2\sqrt{2}-2$，故 C 正确；$\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}=(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EM})\cdot(\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{EN})=\left(\overrightarrow{PE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{NM}\right)=\overrightarrow{PE}^2-\frac{1}{4}\overrightarrow{NM}^2=\overrightarrow{PE}^2-8$，所以 $\overrightarrow{PM}\cdot\overrightarrow{PN}$ 的最大值为 $(\sqrt{2}+1)^2-8=2\sqrt{2}-5$，故 D 正确. 故选 ACD.

12. BCD　设 $|PF_1|=m$，$|PF_2|=n$，所以 $m-n=2\sqrt{2}$，由余弦定理得 $|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1|\cdot|PF_2|\cos\angle F_1PF_2$，即 $16=m^2+n^2-mn$，所以 $16=m^2+n^2-mn=(m-n)^2+mn=8+mn$，所以 $mn=8$，所以 $\triangle F_1PF_2$ 的面积 $S=\frac{1}{2}mn\sin\angle F_1PF_2=2\sqrt{3}$，故 A 错误；由题意知，$A_1(-\sqrt{2},0)$，$A_2(\sqrt{2},0)$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$，设 $P(x_0,y_0)$，所以 $\frac{x_0^2}{2}-\frac{y_0^2}{2}=1$，即 $y_0^2=x_0^2-2$，所以 $k_1=\frac{y_0}{x_0+\sqrt{2}}$，$k_2=\frac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}$，所以 $k_1k_2=\frac{y_0}{x_0+\sqrt{2}}\cdot\frac{y_0}{x_0-\sqrt{2}}=\frac{y_0^2}{x_0^2-2}=1$，故 B 正确；

如图，设$\angle PA_1A_2=\theta$，则$\angle A_1PA_2=2\theta$，$\angle PA_2x=3\theta$，由B选项知$k_{PA_1}\cdot k_{PA_2}=1$，所以$\tan\theta\cdot\tan 3\theta=1$，又$3\theta\in(0,\pi)$，$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，故$\theta+3\theta=\frac{\pi}{2}$，解得$\theta=\frac{\pi}{8}$，即$\angle PA_1A_2=\frac{\pi}{8}$，故C正确；来源：高三答案公众号



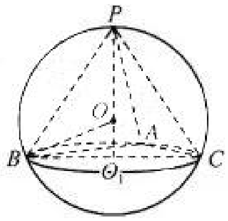
如图，设$\triangle PF_1F_2$的内切圆与PF_1，PF_2，F_1F_2分别切于S，D_1，T三点，由切线长定理知$|PS|=|PD_1|$，$|F_1S|=|F_1T|$，$|F_2T|=|F_2D_1|$，则$|F_1T|-|F_2T|=|F_1S|-|F_2D_1|=|F_1S|+|PS|-(|F_2D_1|+|PD_1|)=|PF_1|-|PF_2|=2a$，又$|F_1T|+|F_2T|=2c$，可得$|F_2T|=c-a$，则$T(a,0)$和$A_2$重合，即$\triangle PF_1F_2$的内切圆圆心$C_1$的横坐标为$a$，同理可得$\triangle QF_1F_2$的内切圆圆心$C_2$的横坐标也为$a$，则$C_1C_2\perp x$轴，且$|C_1C_2|=r_1+r_2$。连接$C_1F_2$，$C_2F_2$，设$\triangle QF_1F_2$的内切圆与$QF_2$相切于点$D_2$，所以$|C_1F_2|=\sqrt{|C_1T|^2+|F_2T|^2}=\sqrt{r_1^2+(c-a)^2}$，$|C_2F_2|=\sqrt{|C_2T|^2+|F_2T|^2}=\sqrt{r_2^2+(c-a)^2}$，又$\angle C_1F_2T=\angle C_1F_2D_1$，$\angle C_2F_2T=\angle C_2F_2D_2$，所以$\angle C_1F_2C_2=\frac{\pi}{2}$，所以$|C_1C_2|^2=|C_1F_2|^2+|C_2F_2|^2$，即$(r_1+r_2)^2=r_1^2+(c-a)^2+r_2^2+(c-a)^2$，所以$r_1\cdot r_2=(c-a)^2=6-4\sqrt{2}$，故D正确. 故选BCD.



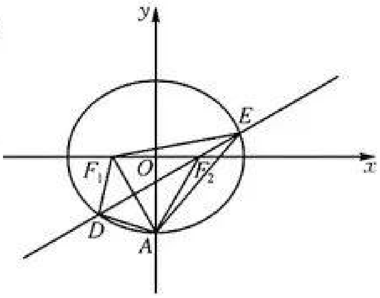
13. 3　因为直线$l_1:ax+3y+2=0$与直线$l_2:x+(a-2)y-a^2-1=0$互相平行，所以$a(a-2)-3=0$，解得$a=-1$或$a=3$. 当$a=-1$时，直线$l_1:-x+3y+2=0$，直线$l_2:x-3y-2=0$，此时直线l_1与直线l_2重合，不符合题意；当$a=3$时，直线$l_1:3x+3y+2=0$，直线$l_2:x+y-10=0$，符合题意. 综上，$a=3$.

14. $x^2+y^2-6x-2y-15=0$　设圆C的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，所以$\begin{cases}25+5E+F=0,\\9+36+3D+6E+F=0,\\2\times\left(-\frac{D}{2}\right)-\frac{E}{2}-7=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}D=-6,\\E=-2,\\F=-15,\end{cases}$所以圆$C$的方程为$x^2+y^2-6x-2y-15=0$.

15. 24　因为$AB\perp AC$，所以BC为$\triangle ABC$所在截面圆O_1的直径，又平面$PBC\perp$平面ABC，$\triangle PBC$为等边三角形，所以O在PO_1上，如图所示. 设$PB=x(x>0)$，则$BO_1=\frac{1}{2}x$，$PO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}x$，所以$PO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}x=OO_1+4=\sqrt{16-\left(\frac{1}{2}x\right)^2}+4$，解得$x=4\sqrt{3}$. 所以$PO_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\times4\sqrt{3}=6$，$BC=4\sqrt{3}$，又$AB\perp AC$，$AB=AC$，所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}\times2\sqrt{6}=12$，所以$V_{P-ABC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times PO_1=\frac{1}{3}\times12\times6=24$.



16. $\frac{52}{3}$　因为C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以$a=2c$，$b^2=a^2-c^2=3c^2$，所以$C$的方程为$\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$，即$3x^2+4y^2-12c^2=0$. 在$\triangle AF_1F_2$中，$|AF_1|=|AF_2|=a=2c$，$|F_1F_2|=2c$，所以$\triangle AF_1F_2$为正三角形. 过$F_2$且垂直于$AF_1$的直线与$C$交于$D$，$E$两点，所以$DE$为线段$AF_1$的垂直平分线，直线$DE$的斜率为$\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以直线$DE$的方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-c)$. 设$D(x_1,y_1)$，$E(x_2,y_2)$，由$\begin{cases}3x^2+4y^2-12c^2=0,\\y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-c)\end{cases}$得$13x^2-8cx-32c^2=0$，所以$x_1+x_2=\frac{8c}{13}$，$x_1x_2=-\frac{32c^2}{13}$，所以$|DE|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{\left(\frac{8c}{13}\right)^2-4\cdot\left(-\frac{32c^2}{13}\right)}=\frac{48}{13}c=8$，解得$c=\frac{13}{6}$，所以$a=2c=\frac{13}{3}$. 因为$DE$为线段$AF_1$的垂直平分线，所以$|AD|=|DF_1|$，$|AE|=|EF_1|$，所以$\triangle ADE$的周长为$|AD|+|AE|+|DE|=|DF_1|+|DF_2|+$



$|EF_1|+|EF_2|=2a+2a=4a=\frac{52}{3}$.

17.(1)证明:因为 $b(\sin B+2\sin C)=a[\sin(B-C)+2\sin C]$,

所以 $b(\sin B+2\sin C)=a(\sin B\cos C-\cos B\sin C+2\sin C)$, …… 1分

由正弦定理得 $b(b+2c)=a(b\cos C-c\cos B+2c)=ab\cos C-ac\cos B+2ac$, …… 2分

又由余弦定理得 $b(b+2c)=ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-ac\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+2ac=b^2-c^2+2ac$, …… 3分

所以 $c^2=2c(a-b)$,又 $c>0$,所以 $c=2(a-b)$. …… 4分

(2)解:因为 $c=2(a-b)$ 且 $c=2$,所以 $a-b=1$,即 $a=1+b$,

又△ABC 外接圆的半径 $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$,由正弦定理 $\frac{c}{\sin C}=2R$,即 $\sin C=\frac{c}{2R}=\frac{2}{\frac{4\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{\pi}{3}$ 或 $C=\frac{2\pi}{3}$. …… 5分

若 $C=\frac{\pi}{3}$,又 $a=1+b$,由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,即 $4=(1+b)^2+b^2-(1+b)b$,

解得 $b=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ 或 $b=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$(舍去),所以 $a=1+\frac{-1+\sqrt{13}}{2}=\frac{1+\sqrt{13}}{2}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{13}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. …… 7分

若 $C=\frac{2\pi}{3}$,又 $a=1+b$,由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,即 $4=(1+b)^2+b^2+(1+b)b$,

解得 $b=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $b=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$(舍去),所以 $a=1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$. …… 9分

所以△ABC 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 或 $\frac{\sqrt{3}}{4}$. …… 10分

18.解:(1)因为 $a_2-a_1=4$,$a_3-a_2=6$,所以 $a_3-a_2-(a_2-a_1)=2$.

所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为4,公差为2的等差数列,所以 $a_{n+1}-a_n=4+2(n-1)=2n+2$. …… 2分

当 $n\geqslant2$ 时,$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2n+2(n-1)+\cdots+2\times2+2=n^2+n$.

…… 4分

当 $n=1$ 时,$a_1=2$ 也满足上式,所以 $a_n=n^2+n$. …… 5分

(2)由(1)知,$b_n=a_n\cos n\pi=(-1)^n(n^2+n)=(-1)^n n(n+1)$, …… 6分

当 $n=2k,k\in\mathbf{N}^*$ 时,

$T_n=-1\times2+2\times3-3\times4+4\times5-\cdots-(n-1)n+n(n+1)=2(2+4+\cdots+n)=\frac{n(n+2)}{2}$; …… 9分

当 $n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*$ 时,

$T_n=T_{n+1}-b_{n+1}=\frac{(n+1)(n+3)}{2}-(n+1)(n+2)=-\frac{(n+1)^2}{2}$, …… 11分

所以 $T_n=\begin{cases}\frac{n(n+2)}{2}, & n=2k,k\in\mathbf{N}^*,\\ -\frac{(n+1)^2}{2}, & n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*.\end{cases}$ …… 12分

19.解:(1)因为 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$,故可设 $a=2k$,$c=\sqrt{2}k$,$b=\sqrt{2}k(k>0)$,

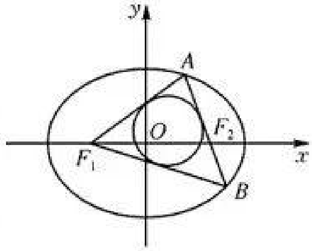
故 C 的方程为 $\frac{x^2}{4k^2}+\frac{y^2}{2k^2}=1$, …… 2分

代入 $P\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$ 得 $\frac{1}{16k^2}+\frac{7}{16k^2}=1$,解得 $k^2=\frac{1}{2}$, …… 3分

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$. …… 4分

(2)易得$\triangle ABF_1$的周长为$4a=4\sqrt{2}$,故$S_{\triangle ABF_1}=\frac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{10}}{7}=\frac{4\sqrt{5}}{7}$.

…………………………………………………………………… 5分



设$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由题意可得直线l与x轴不重合,故可设直线l的方程为$x=ty+1$,来源:高三答案公众号

则$S_{\triangle ABF_1}=\frac{1}{2}\times2\times|y_1-y_2|=|y_1-y_2|=\frac{4\sqrt{5}}{7}$, ………………………… 6分

由$\begin{cases}x=ty+1,\\x^2+2y^2=2,\end{cases}$得$(t^2+2)y^2+2ty-1=0$,此时$\Delta=8t^2+8>0$,

所以$y_1+y_2=-\frac{2t}{t^2+2}$,$y_1y_2=-\frac{1}{t^2+2}$, …………………………………………………… 8分

故$|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\sqrt{\left(-\frac{2t}{t^2+2}\right)^2-4\left(-\frac{1}{t^2+2}\right)}=\frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{t^2+1}}{t^2+2}=\frac{4\sqrt{5}}{7}$, ……… 10分

解得$t=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$,故直线l的方程为$2x-\sqrt{6}y-2=0$或$2x+\sqrt{6}y-2=0$. ……………………… 12分

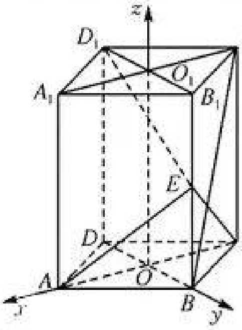
20.(1)证明:连接BD,B_1D_1,如图所示.因为四边形$ABCD$是菱形,所以$AC\perp BD$, ……………………… 1分

因为直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,所以$BB_1\perp$平面$ABCD$,又$AC\subset$平面$ABCD$,所以$BB_1\perp AC$, … 2分

又$BD\cap BB_1=B$,$BD,BB_1\subset$平面DBB_1D_1,所以$AC\perp$平面DBB_1D_1, ……………………… 4分

又$D_1E\subset$平面DBB_1D_1,所以$AC\perp D_1E$. ……………………………………………………… 5分

(2)解:记AC与BD的交点为O,连接A_1C_1交B_1D_1于点O_1.



以O为坐标原点,分别以OA,OB,OO_1所在的直线为x轴,y轴,z轴建立空间直角坐标系,如图所示,所以$A(\sqrt{3},0,0)$,$C(-\sqrt{3},0,0)$,$C_1(-\sqrt{3},0,3)$,$B(0,1,0)$,设$BE=m(0<m<3)$,故$E(0,1,m)$,

所以$\overrightarrow{BC_1}=(-\sqrt{3},-1,3)$,$\overrightarrow{CE}=(\sqrt{3},1,m)$,$\overrightarrow{CA}=(2\sqrt{3},0,0)$,$\overrightarrow{BE}=(0,0,m)$.

设平面ACE的一个法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,所以$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CE}=\sqrt{3}x+y+mz=0,\\\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=2\sqrt{3}x=0.\end{cases}$

令$y=m$,解得$x=0$,$z=-1$,所以平面ACE的一个法向量$\boldsymbol{n}=(0,m,-1)$.

…………………………………………………………………………………… 6分

设平面BCE的一个法向量$\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,所以$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CE}=\sqrt{3}a+b+mc=0,\\\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BE}=mc=0,\end{cases}$

令$a=1$,解得$b=-\sqrt{3}$,$c=0$,所以平面BCE的一个法向量$\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},0)$, ……………………… 7分

所以$|\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{\sqrt{3}m}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{1+3}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$, ……………………………………………… 9分

解得$m=1$, …………………………………………………………………………………… 10分

所以平面ACE的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$.

设直线BC_1与平面AEC所成的角为θ,所以$\sin\theta=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{BC_1}|}=\frac{4}{\sqrt{1+1}\times\sqrt{3+1+9}}=\frac{2\sqrt{26}}{13}$,

所以直线BC_1与平面AEC所成角的正弦值为$\frac{2\sqrt{26}}{13}$. ……………………………………………… 12分

21.解:(1)因为$F\left(\frac{p}{2},0\right)$,$P(0,-4)$,且点$A$恰好为线段$PF$中点,所以$A\left(\frac{p}{4},-2\right)$, ……………… 1分

又因为A在C上,所以$(-2)^2=2p\cdot\frac{p}{4}$,即$p^2=8$, ……………………………………………… 3分

解得$p=2\sqrt{2}$,所以C的方程为$y^2=4\sqrt{2}x$. ……………………………………………………… 4分

(2)设$T(m,n)$,由题意可知直线l斜率存在,设直线l的方程为$y=kx-4$,$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

由$\begin{cases}y^2=4\sqrt{2}x,\\y=kx-4\end{cases}$得$ky^2-4\sqrt{2}y-16\sqrt{2}=0$,所以$y_1+y_2=\frac{4\sqrt{2}}{k}$,$y_1y_2=-\frac{16\sqrt{2}}{k}$, ……………………… 6分

所以$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=(x_1-m)(x_2-m)+(y_1-n)(y_2-n)$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}y_1^2-m\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{8}y_2^2-m\right)+(y_1-n)(y_2-n)=\frac{1}{32}y_1^2y_2^2-\frac{\sqrt{2}}{8}m(y_1^2+y_2^2)+m^2+y_1y_2-n(y_1+y_2)+n^2$

$=\frac{16}{k^2}-\frac{\sqrt{2}}{8}m\left(\frac{32}{k^2}+\frac{32\sqrt{2}}{k}\right)+m^2-\frac{16\sqrt{2}}{k}-\frac{4\sqrt{2}n}{k}+n^2$

$=\frac{16-4\sqrt{2}m}{k^2}-\frac{8m+16\sqrt{2}+4\sqrt{2}n}{k}+m^2+n^2$. ………………………… 9 分

令$\begin{cases}8m+16\sqrt{2}+4\sqrt{2}n=0,\\16-4\sqrt{2}m=0,\end{cases}$ ………………………… 10 分

解得$\begin{cases}m=2\sqrt{2},\\n=-8\end{cases}$即 $T(2\sqrt{2},-8)$, ………………………… 11 分

此时$\overrightarrow{TA}\cdot\overrightarrow{TB}=m^2+n^2=72$. ………………………… 12 分

22.(1)证明:因为 $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$,所以若 $a=-1$,$f(x)=xe^x+1+x(\ln x+1)$. ………… 1 分

要证 $f(x)\geqslant x(e^x+2)$,即证 $1+x(\ln x+1)\geqslant 2x$,即证 $\ln x+\frac{1}{x}-1\geqslant 0$. ………………………… 2 分

令 $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$,所以 $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,令 $h'(x)>0$,解得 $x>1$,令 $h'(x)<0$,解得 $0<x<1$,

所以 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,

所以 $h(x)\geqslant h(1)=0$,所以 $f(x)\geqslant x(e^x+2)$. ………………………… 3 分

(2)解:若 $f(x)>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$恒成立,

即$\frac{|xe^x-a|}{x}-a(\ln x+1)>0$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$恒成立. ………………………… 4 分

令 $g(x)=\frac{|xe^x-a|}{x}-a(\ln x+1)$.

若 $a\leqslant 0$,则 $g(x)=e^x-a\left(\frac{1}{x}+\ln x+1\right)$.

由(1)知 $\ln x+\frac{1}{x}-1\geqslant 0$,所以 $\ln x+\frac{1}{x}+1\geqslant 2$.又 $a\leqslant 0$,所以$-a\left(\frac{1}{x}+\ln x+1\right)\geqslant 0$.

又 $e^x>0$,所以 $g(x)=e^x-a\left(\frac{1}{x}+\ln x+1\right)>0$,符合题意; ………………………… 6 分

若 $a>0$, 令 $u(x)=xe^x-a(x>0)$,$u'(x)=(x+1)e^x>0$ 在 $x\in(0,+\infty)$上恒成立,

所以 $u(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,又 $u(0)=-a<0$,$u(a)=a(e^a-1)>0$,

所以存在唯一的 $x_0\in(0,a)$,使得 $u(x_0)=0$,且 $a=x_0e^{x_0}$, ………………………… 7 分

所以 $g(x)=\begin{cases}\frac{a}{x}-e^x-a\ln x-a,0<x\leqslant x_0,\\e^x-\frac{a}{x}-a\ln x-a,x>x_0,\end{cases}$ 当 $0<x\leqslant x_0$ 时,$g(x)=\frac{a}{x}-e^x-a\ln x-a$,

所以 $g'(x)=-\frac{a}{x^2}-e^x-\frac{a}{x}<0$,所以 $g(x)$在$(0,x_0]$上单调递减. ………………………… 8 分

当 $x>x_0$ 时,$g(x)=e^x-\frac{a}{x}-a\ln x-a$,所以 $g'(x)=e^x-\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}$,

当 $x>x_0$ 时,$y=e^x-\frac{a}{x}$在$(x_0,+\infty)$上单调递增,所以 $e^x-\frac{a}{x}>e^{x_0}-\frac{a}{x_0}=e^{x_0}-\frac{x_0e^{x_0}}{x_0}=0$,

所以当 $x>x_0$ 时,$g'(x)=e^x-\frac{a}{x}+\frac{a}{x^2}>0$,所以 $g(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增, ………………………… 9 分

所以 $g(x)_{\min}=g(x_0)=-a(\ln x_0+1)>0$,解得 $0<x_0<\frac{1}{e}$. ………………………… 10 分

设 $y=xe^x$,$x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$,所以 $y'=(x+1)e^x>0$ 在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上恒成立,

所以 $y=xe^x$ 在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递增,所以 $a=x_0e^{x_0}\in\left(0,\frac{1}{e}e^{\frac{1}{e}}\right)$,即 $a\in(0,e^{\frac{1}{e}-1})$. ………………………… 11 分

综上所述,a 的取值范围为$(-\infty,e^{\frac{1}{e}-1})$. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。