

绝密★启用前

齐鲁名校大联考

2023 届山东省高三第二次学业质量联合检测

数 学

本试卷 4 页。总分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项：

- 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
- 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
- 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- 已知复数 z 在复平面内的对应点为 $(2, 1)$ ，则 $z + \frac{10}{z} =$
A. $6 + 3i$ B. $6 + i$ C. $6 - 3i$ D. $6 - i$
- 设集合 $M = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 100 < 2^x\}$ ，则 M 的所有子集的个数为
A. 3 B. 4 C. 8 D. 16
- 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，且 $P(X \geq a) = 0.5$ ， $P(X < b) = 3P(X \geq b)$ ，则 $P(X \leq 2a - b) =$
A. 0.25 B. 0.3 C. 0.5 D. 0.75
- 抛掷一枚质地均匀的骰子 3 次，则向上的点数为 3 个互不相同的偶数的概率为
A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $\frac{1}{18}$ D. $\frac{1}{36}$
- 已知等边三角形 ABC 的边长为 1，动点 P 满足 $|\overrightarrow{AP}| = 1$ 。若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$ ，则 $\lambda + \mu$ 的最小值为
A. $-\sqrt{3}$ B. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. 0 D. 3
- 克罗狄斯·托勒密是希腊数学家，他博学多才，既是天文学权威，也是地理学大师。托勒密定理是平面几何中非常著名的定理，它揭示了圆内接四边形的对角线与边长的内在联系，该定理的内容为圆的内接四边形中，两对角线长的乘积等于两组对边长乘积之和。已知四边形 $ABCD$ 是圆 O 的内接四边形，且 $AC = \sqrt{3}BD$ ， $\angle ADC = 2\angle BAD$ 。若 $AB \cdot CD + BC \cdot AD = 4\sqrt{3}$ ，则圆 O 的半径为
A. 4 B. 2 C. $\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{3}$
- 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 3，点 M 满足 $\overrightarrow{CC_1} = 3\overrightarrow{CM}$ 。若在正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 内有一动点 P 满足 $BP \parallel$ 平面 AMD_1 ，则动点 P 的轨迹长为
A. 3 B. $\sqrt{10}$ C. $\sqrt{13}$ D. $3\sqrt{2}$

8. 设 $a = \sin 0.2, b = 0.2 \cos 0.1, c = 2 \sin 0.1$, 则

- A. $a < b < c$ B. $a < c < b$ C. $b < a < c$ D. $c < b < a$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 和圆 $P: x^2 + (y-3)^2 = r^2 (r > 0)$, 则

- A. 双曲线 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$
 B. 双曲线 C 的渐近线方程为 $x \pm 2y = 0$
 C. 当 $r = \sqrt{6}$ 时, 双曲线 C 与圆 P 没有公共点
 D. 当 $r = 2\sqrt{2}$ 时, 双曲线 C 与圆 P 恰有两个公共点

10. 已知函数 $f(x) = a \sin x + b \cos x, ab \neq 0$. 若曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(-\frac{\pi}{6}, 2)$, 且关于直线 $x = \frac{\pi}{6}$ 对称, 则

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π B. $b = 2\sqrt{3}$
 C. $f(x)$ 的最大值为 2 D. $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{6})$ 上单调递增

11. 在数列 $\{a_n\}$ 中, 若对于任意 $n \in \mathbb{N}^+$, 都有 $a_{n+1} + \frac{6}{a_n + 1} = 4$, 则

- A. 当 $a_1 = 1$ 或 $a_1 = 2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为常数列
 B. 当 $a_1 > 2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递减数列, 且 $2 < a_n \leq a_1$
 C. 当 $1 < a_1 < 2$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为递增数列
 D. 当 $0 < a_1 < 1$ 时, 数列 $\{a_n\}$ 为单调数列

12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , $f(x + \frac{1}{2})$ 为奇函数, 且对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $f(2-3x) = f(3x)$, 则

- A. $f(x+1) = f(x)$ B. $f(-\frac{1}{2}) = 0$
 C. $f(x+2)$ 为偶函数 D. $f(x - \frac{1}{2})$ 为奇函数

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 写出曲线 $y = x^3 - 3x$ 过点 $(2, 2)$ 的一条切线方程_____.

14. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$, 直线 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 1$ 交 C 于 M, N 两点, 点 $P(0, 3)$, 则 $\triangle PMN$ 的周长为_____. 来源: 高三答案公众号

15. 设奇函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbb{R} , 且对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 都有 $f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. 若当 $x > 1$ 时, $f(x) < 0$, 且 $f(\frac{1}{4}) = 2$, 则不等式 $\lg(f(x) + 2) < 0$ 的解集为_____.

16. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 6, 且 $PA = 2PB = 3PC = 6$. 若该三棱锥的四个顶点都在球 O 的球面上, 则三棱锥 $O-ABC$ 的体积为_____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n - 1, a_1 + a_2 = a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = 2n - 1$, 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_{4n-3} = b_{2n-1}, c_{4n-2} = a_{2n-1}, c_{4n-1} = a_{2n}, c_{4n} = b_{2n}$, 求 $\{c_n\}$ 的前 $4n+1$ 项和 S_{4n+1} .

18. (12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = 2AC, D$ 是边 BC 上一点, $\angle CAD = 2\angle BAD$.

(1) 若 $\angle BAC = \frac{3\pi}{4}$, 求 $\frac{BD}{CD}$ 的值；

(2) 若 $AC = 1$, 求 AD 的取值范围.

19. (12 分)

为了促进地方经济的快速发展, 国家鼓励地方政府实行积极灵活的人才引进政策, 被引进的人才, 可享受地方的福利待遇, 发放高标准的安家补贴费和生活津贴. 某市政府从本年度的 1 月份开始进行人才招聘工作, 参加报名的人员通过笔试和面试两个环节的审查后, 符合一定标准的人员才能被录用. 现对该市 1~4 月份的报名人员数和录用人才数(单位: 千人) 进行统计, 得到如下表格.

月份	1 月份	2 月份	3 月份	4 月份
报名人员数 x /千人	3.5	5	6.5	7
录用人才数 y /千人	0.2	0.33	0.4	0.47

(1) 求出 y 关于 x 的经验回归方程；

(2) 假设该市对被录用的人才每人发放 2 万元的生活津贴.

(I) 若该市 5 月份报名人员数为 8 000 人, 试估计该市对 5 月份招聘的人才需要发放的生活津贴的总金额；

(II) 假设在参加报名的人员中, 小王和小李两人被录用的概率分别为 $p, 3p-1$. 若两人的生活津贴之和的均值不超过 3 万元, 求 p 的取值范围.

附:经验回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中,斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为 $\hat{b} =$

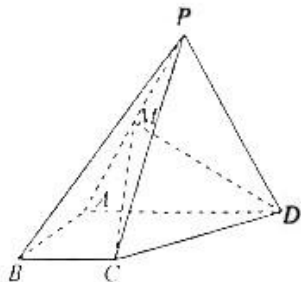
$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}; \sum_{i=1}^n x_i^2 = 128.5, \sum_{i=1}^n x_i y_i = 8.24.$$

20. (12分)

如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAD$ 为等边三角形, M 为 PA 的中点, $PD \perp AB$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

(1)证明:平面 $MCD \perp$ 平面 PAB ;

(2)若 $AD \parallel BC$, $AD = 2BC$, $CD = 2AB$, 求平面 MCD 与平面 PBC 夹角的余弦值.



21. (12分)

已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, O 为坐标原点, M 为 C 的准线 l 上的一点, 直线 MF 的斜率为 -1 , $\triangle OFM$ 的面积为 1.

(1)求 C 的方程;

(2)过点 F 作一条直线 l' , 交 C 于 A, B 两点, 试问在 l 上是否存在定点 N , 使得直线 NA 与 NB 的斜率之和等于直线 NF 斜率的平方? 若存在, 求出点 N 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. (12分)

已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = x^2 - 3a \ln x$, $g(x) = 2ax - a \ln x$.

(1)若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最小值相等, 求 a 的值;

(2)若方程 $f(x) = g(x)$ 恰有一个实根, 求 a 的值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

