贵阳第一中学2022届高考适应性月考卷（一）
理科数学参考答案

一、选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	B	D	A	B	D	C	A	B	C	D	C

【解析】

1．集合 $A=\{x\mid x^2-2x-3\leqslant 0\}=[-1,\ 3]$；解不等式 $\dfrac{4}{x+2}>1$ 得 $-2<x<2$，所以集合 $B=(-2,\ 2)$，所以 $A\cap B=[-1,\ 2)$，故选A．

2．因为 $z(1+\mathrm{i})=3-\mathrm{i}$，所以 $z=\dfrac{3-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=1-2\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=1+2\mathrm{i}$，故选B．

3．因为 $\vec{a}=(1,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$，所以 $m\vec{a}+n\vec{b}=(m-n,\ 2m+3n)$，又因为 $(m\vec{a}+n\vec{b})\perp\vec{b}$，所以 $(m\vec{a}+n\vec{b})\cdot\vec{b}=-(m-n)+3(2m+2n)=0$，化简得 $\dfrac{m}{n}=-2$，故选D．

4．因为 $S_n=\dfrac{3}{2}n^2-\dfrac{17}{2}n$，由 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2,\end{cases}$ 可求得 $a_n=3n-10$，所以当 $n=3$ 时，$|a_n|$ 取得最小值1，故选A．

5．因为 $f(x)=\ln(2x^2-3x+1)$，所以定义域为 $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{2}\right)\cup(1,\ +\infty)$，所以由复合函数的单调性知 $f(x)$ 的单调递减区间 $\left(-\infty,\ \dfrac{1}{2}\right)$，故选B．

6．根据二项式定理，$(x+1)(x-2)^5$ 的展开式中 x^5 的系数为 $\mathrm{C}_5^1\times(-2)^1+\mathrm{C}_5^0=-9$，故选D．

7．由表得 $\bar{x}=14$，$\bar{y}=27.6$，所以 $27.6=-8.1\times 14+a$，解得 $a=141$；所以当 $x=10$ 时，$y=-8.1\times 10+141=60$，故选C．

8．先分组，有 $\dfrac{\mathrm{C}_6^2\mathrm{C}_4^2\mathrm{C}_2^2}{\mathrm{A}_3^3}=15$ 种，再分配，由于甲所在小组不能去敬老院，所以安排的方法有 $\mathrm{C}_2^1\mathrm{A}_2^2=4$ 种，故不同的安排共有 $15\times 4=60$ 种，故选A．

9．圆 C 的圆心坐标为 $(-3,\ 2)$，半径为 $2\sqrt{2}$；因为直线 $mx-ny+3=0$ 截圆所得弦长为 $4\sqrt{2}$，所以直线 $mx-ny+3=0$ 过圆心，即 $3m+2n=3$，所以 $\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{3}(3m+2n)\left(\dfrac{2}{m}+\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{3}\left(8+\dfrac{3m}{n}+\dfrac{4n}{m}\right)\geqslant\dfrac{8+4\sqrt{3}}{3}$，经检验，等号可成立，故选 B.

10．$3744_{(8)}=4\times8^0+4\times8^1+7\times8^2+3\times8^3=2020$，故选 C.

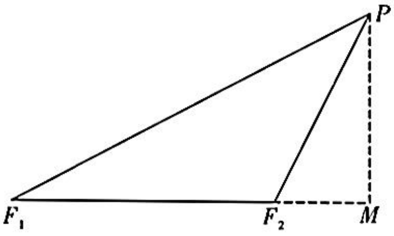

图 1

11．如图 1，由题意 $PM=\sqrt{3}a$，$\angle PF_2F_1=120^\circ$，所以 $PF_2=2a$，$PF_1=4a$，又因为 $F_1F_2=2c$，所以由余弦定理得 $(4a)^2=(2a)^2+(2c)^2+2a\times2c$，又因为离心率 $e=\dfrac{c}{a}$，联立化简得 $e^2+e-3=0$，所以 $e=\dfrac{\sqrt{13}-1}{2}$，故选 D.

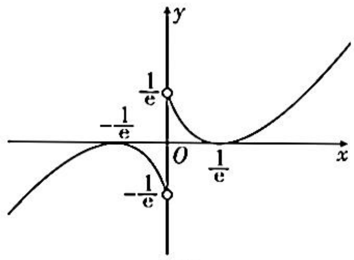

图 2

12．当 $x>0$ 时，$f(x)=x\ln x+\dfrac{1}{e}$，$f'(x)=\ln x+1$，所以函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{e},\ +\infty\right)$ 上单调递增，结合 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，函数 $f(x)$ 的图象如图 2，函数 $F(x)$ 的零点即方程 $f(x)[f(x)+a]=0$ 的根，又因为 $f(x)=0$ 有 3 个根，所以 $f(x)=-a$ 有 2 个根，即满足条件 $-\dfrac{1}{e}<-a<0$ 或 $0<-a<\dfrac{1}{e}$，解得 $a\in\left(-\dfrac{1}{e},\ 0\right)\cup\left(0,\ \dfrac{1}{e}\right)$，故选 C.

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	-7	5	34π	$\sqrt{5}-3$；$\sqrt{2n+1}-1$

【解析】

13．因为 $\tan\beta=2$，所以 $\tan2\beta=\dfrac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}=-\dfrac{4}{3}$，所以 $\tan(\alpha-2\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan2\beta}{1+\tan\alpha\tan2\beta}=-7$.

14．如图 3，不等式组 $\begin{cases}x+y\geqslant1,\\x-y\leqslant1,\\x-2y\geqslant-2,\end{cases}$ 表示的可行域为封闭 $\triangle ABC$，$z=|3x+4y-29|=$

$5\times\frac{|3x+4y-29|}{5}$，$\frac{|3x+4y-29|}{5}$表示点$(x,\ y)$到直线$3x+4y-29=0$的距离；由图可知，当$x=4$，$y=3$时取得最小值，且$z_{\min}=|3\times4+4\times3-29|=5$.

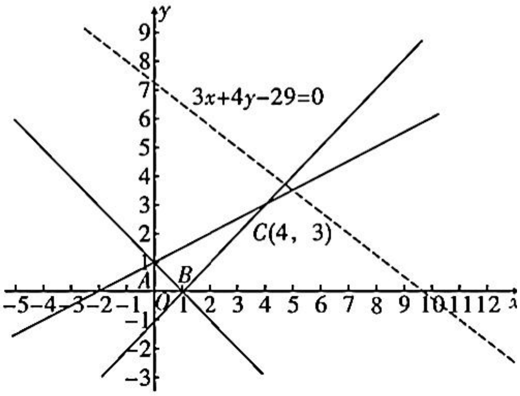

图 3

15．该几何体是图 4 甲的长方体截掉三棱锥$A-BDA_1$后得到的几何体图乙，所以该几何体的外接球与长方体的外接球重合，外接球半径$R=\frac{\sqrt{3^2+3^2+4^2}}{2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$，所以外接球的表面积$S=4\pi R^2=34\pi$.

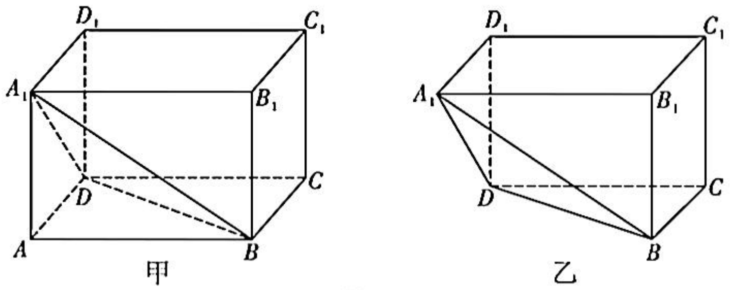

图 4

16．因为$a_1=\sqrt{2}$，$a_n+a_{n+1}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$，所以$a_1+a_2=\sqrt{3}-\sqrt{1}$，解得$a_2=\sqrt{3}-\sqrt{2}-1$，又因为$a_2+a_3=\sqrt{4}-\sqrt{2}$，所以$a_3=\sqrt{4}-\sqrt{3}+1$，又因为$a_3+a_4=\sqrt{5}-\sqrt{3}$，所以$a_4=\sqrt{5}-\sqrt{4}-1=\sqrt{5}-3$；$S_{2n}=(a_1+a_2)+(a_3+a_4)+\cdots+(a_{2n-1}+a_{2n})=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})=\sqrt{2n+1}-1$.

三、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 12 分）

解：（1）$\because (2b-c)\cos A=a\cos C$，

$\therefore$由射影定理得：$2b\cos A=c\cos A+a\cos C=b$，…………………………（3 分）

$\therefore \cos A=\frac{1}{2}$，…………………………（4 分）

$\therefore A=\frac{\pi}{3}$.…………………………（5 分）

（2）由余弦定理$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

得$a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc\geqslant\frac{(b+c)^2}{4}$.…………………………（8 分）

所以$\triangle ABC$的周长$3\le C_{\triangle ABC}$

即$\triangle ABC$的周长的取值范围为$[3,4)$. ……………………………

18.（本小题满分12分）

解：（1）由表中数据，男生样本数为100人，其中喜欢打乒乓球的有52人，

所以该校男生喜欢打乒乓球的概率的估计值为$\frac{52}{100}=0.52$.

……………………………………………………（2分）

同理，该校女生喜欢打乒乓球的概率的估计值为$\frac{34}{100}=0.34$，

……………………………………………………（3分）

又∵该校共有1800人，男女比例为5∶4，

∴该校共有女生$1800\times\frac{4}{9}=800$人， ……………………………………（5分）

∴该校女生喜欢打乒乓球的人数为$800\times 0.34=272$人. ……………………（6分）

（2）根据表中数据：$a=52$，$b=34$，$c=48$，$d=66$，

可计算K^2的观测值$k=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}=\frac{200\times(52\times 66-34\times 48)^2}{86\times 114\times 100\times 100}$，

……………………………………………………（8分）

化简计算可得：$k=\frac{5400}{817}\approx 6.610$， …………………………………（10分）

又∵$6.610<6.635$，

∴不能在犯错误的概率不超过0.01的前提下认为“中学生喜欢打乒乓球与性别有关”.

……………………………………………………（12分）

19.（本小题满分12分）

（1）证明：∵底面$ABCD$是边长为2的正方形，

∴$AB\perp AD$，

又∵平面$PAD\perp$底面$ABCD$，且平面$PAD\cap$底面$ABCD=AD$，$AB\subset$底面$ABCD$，

$\therefore AB\perp$ 平面 PAD，

$\therefore AB\perp PD$， $AB\perp AP$， ……………………………………………（2 分）

$\therefore\triangle ABP$ 是直角三角形，

又$\because PB=\sqrt{6}$， $AB=2$， $\therefore AP=\sqrt{2}$， ……………………………………（3 分）

同理， $PD=\sqrt{2}$，

$\therefore$在$\triangle PAD$ 中， $PA^2+PD^2=AD^2$， 即 $PA\perp PD$， ……………………………（4 分）

又$\because AB\cap PA=A$，

$\therefore PD\perp$ 平面 PAB， ……………………………………………（5 分）

又$\because PD\subset$平面 PCD，

$\therefore$平面 $PAB\perp$ 平面 PCD. ……………………………………………（6 分）

（2）解：如图 5 建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0, 0, 0)$， $B(2, 0, 0)$， $C(2, 2, 0)$， $P(0, 1, 1)$，

$M\left(1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$， ……………………（7 分）

$\therefore \overrightarrow{AB}=(2, 0, 0)$， $\overrightarrow{AM}=\left(1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

……………………………………（9 分）

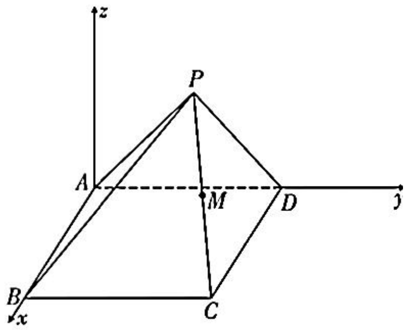

图 5

设平面 ABM 的法向量为$\vec{n}_1=(x, y, z)$，

则$\begin{cases}\vec{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=0,\\ \vec{n}_1\cdot\overrightarrow{AM}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=0,\\ x+\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{2}z=0,\end{cases}$

令 $y=1$， $x=0$， $y=1$， $z=-3$，

$\therefore$平面 ABM 的一个法向量$\vec{n}_1=(0, 1, -3)$，

同理，平面 BMC 的一个法向量为$\vec{n}_2=(1, 0, 2)$. ……………………………（10 分）

设钝二面角 $A-BM-C$ 的平面角为θ，

则 $\cos\theta=-\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$，

$\therefore$钝二面角 $A-BM-C$ 的余弦值为$-\dfrac{3\sqrt{2}}{5}$. ……………………………（12 分）

20．（本小题满分 12 分）

解：（1）∵ $f(x)=a\ln x+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$，

∴ $f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{2}{x^3}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax^2-x-2}{x^3}(x>0)$． ……………………………（1 分）

1° 当 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)<0$ 恒成立，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

……………………………………………………（2 分）

2° 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0(x>0)$，解得 $x=\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2a}$， ……………………（3 分）

当 x 变化时，$f'(x)$ 和 $f(x)$ 的变化如下表：

x	$\left(0,\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2a}\right)$	$\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2a}$	$\left(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2a},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

∴函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2a}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增.

……………………………………………………（5 分）

综上，当 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2a}\right)$ 上单调递减，在区间 $\left(\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2a},+\infty\right)$ 上单调递增. ……………………………………………………（6 分）

（2）由题意 $g(x)=f(x)-\frac{1}{x^2}=a\ln x+\frac{1}{x}$，

∴ $g'(x)=\frac{a}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{ax-1}{x^2}(x>0)$， ……………………………………………（8 分）

又∵函数 $g(x)$ 恰有两个零点，

∴ $a\leqslant 0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，不符合题意；

……………………………………………………（9 分）

∴ $a>0$，此时函数 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，

……………………………………………………（10 分）

又∵ $x\to 0$ 时，$g(x)\to+\infty$；$x\to+\infty$ 时，$g(x)\to+\infty$，

∴函数 $g(x)$ 恰有两个零点，

当且仅当 $a>0$ 且 $g\left(\dfrac{1}{a}\right)=a\ln\dfrac{1}{a}+a=a(1-\ln a)<0$，解得 $a>\mathrm{e}$，

∴实数 a 的取值范围为 $(\mathrm{e},+\infty)$． …………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

（1）解：∵过椭圆的右焦点 $F(c,\ 0)$ 有且仅有一条直线与圆 C_2：$x^2+y^2=2$ 相切，

∴ $F(c,\ 0)$ 在圆 C_2：$x^2+y^2=2$ 的图象上，

即 $c^2=2$． …………………………………………………………（2 分）

又∵椭圆 C_1 的离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$，

∴ $a=\sqrt{3}$，即 $a^2=3$，

∴ $b^2=a^2-c^2=1$， ……………………………………………………（4 分）

∴椭圆 C_1 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$． ……………………………………………（5 分）

（2）证明：∵ C_2：$x^2+y^2=2$，曲线 C_2 与 y 轴的正半轴交于点 P，

∴点 P 的坐标为 $(0,\ \sqrt{2})$， ……………………………………………（6 分）

设直线 l 的方程为 $y=kx+m(k\neq 0)$，A，B 两点的坐标分别为 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$，

∵ $\angle BPO=\angle APO$，

∴ $k_{AP}+k_{BP}=0$， ……………………………………………………（7 分）

又∵ $k_{AP}=\dfrac{y_1-\sqrt{2}}{x_1}$，$k_{BP}=\dfrac{y_2-\sqrt{2}}{x_2}$，

代入化简得：$x_2(y_1-\sqrt{2})+x_1(y_2-\sqrt{2})=0$， ……………………………（8 分）

又∵ $y_1=kx_1+m$，$y_2=kx_2+m$，

代入化简得 $2kx_1x_2+(m-\sqrt{2})(x_1+x_2)=0$（①式）， ……………………………（9 分）

联立直线 l 和椭圆 C_1 的方程：$\begin{cases}y=kx+m,\\x^2+3y^2=3\end{cases}\Rightarrow(3k^2+1)x^2+6kmx+3m^2-3=0$，

…………………………………………………（10 分）

$\therefore x_1+x_2=-\dfrac{6km}{3k^2+1}$， $x_1x_2=\dfrac{3m^2-3}{3k^2+1}$，

代入①式化简得：$2k\cdot(3m^2-3)-6km(m-\sqrt{2})=0$，

解得 $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ……………………………………………………（11 分）

$\therefore$直线 l 的方程为 $y=kx+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即直线 l 恒过定点 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

……………………………………………………（12 分）

22.（本小题满分 10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

解：（1）$\because C_1$：$\begin{cases}x=2\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\end{cases}$ （θ 为参数），

$\therefore C_1$：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$， ……………………………………………………（2 分）

又$\because C_2$：$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-\sqrt{3}=0$，

将 $\rho\cos\theta=x$， $\rho\sin\theta=y$，

代入得：$\therefore C_2$：$x-y-\sqrt{3}=0$，

……………………………………………………（4 分）

$\therefore$曲线 C_1 的普通方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-y-\sqrt{3}=0$.

……………………………………………………（5 分）

（2）$\because$曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-y-\sqrt{3}=0$，

$\therefore$曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\end{cases}$ （t 为参数），

定点为 $M(\sqrt{3},\ 0)$， ……………………………………………………（6 分）

联立曲线 C_2 参数方程和曲线 C_1 的普通方程，

得：$5t^2+2\sqrt{6}t-2=0$，

$\therefore t_1+t_2=-\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$， $t_1t_2=-\dfrac{2}{5}$， ……………………………………………………（8 分）

$\therefore \dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}=\left|\dfrac{1}{t_2}-\dfrac{1}{t_2}\right|=\dfrac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\dfrac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=4$，

$\therefore \dfrac{1}{|MA|}+\dfrac{1}{|MB|}$的值为4. …………………………………………（10分）

23.（本小题满分10分）【选修4–5：不等式选讲】

解：（1）当$a=1$时，$f(x)=|3x-2|-|3x+1|=\begin{cases}-3, & x\geqslant\dfrac{2}{3},\\ -6x+1, & -\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3},\\ 3, & x\leqslant-\dfrac{1}{3},\end{cases}$

…………………………………………………………（2分）

$\therefore$不等式$f(x)\leqslant1$等价于$\begin{cases}x\geqslant\dfrac{2}{3},\\ -3\leqslant1\end{cases}$ 或$\begin{cases}-\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{2}{3},\\ -6x+1\leqslant1\end{cases}$ 或$\begin{cases}x\leqslant-\dfrac{1}{3},\\ 3\leqslant1,\end{cases}$

…………………………………………………………（4分）

解得$x\geqslant0$，

$\therefore$不等式$f(x)\leqslant1$的解集为$[0,+\infty)$. ……………………………………（5分）

（2）$\because f(x)=|3x-2|-|3x+a|\leqslant|a+2|$，

$\therefore f(x)\leqslant a^2-2a-8$等价于$|a+2|\leqslant a^2-2a-8$恒成立，

$\therefore |a+2|\leqslant(a+2)(a-4)$. …………………………………………………（6分）

1° 当$a+2=0$，即$a=-2$时，$0\leqslant0$恒成立； …………………………（7分）

2° 当$a+2>0$，即$a>-2$时，$|a+2|\leqslant(a+2)(a-4)$转换为$a-4\geqslant1$，

解得$a\geqslant5$； ………………………………………………（8分）

3° 当$a+2<0$，即$a<-2$时，$|a+2|\leqslant(a+2)(a-4)$转换为$a-4\leqslant-1$，

解得$a<-2$， ……………………………………………（9分）

综上，实数a的取值范围为$(-\infty,-2]\cup[5,+\infty)$. ………………………（10分）