浙江省新阵地教育联盟 2024 届第一次联考

数学参考答案

一、选择题： 本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．B　2．C　3．A　4．A　5．C　6．D　7．B　8．C

二、选择题： 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9．BD　10．BC　11．ACD　12．ABC

三、填空题： 本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．54　14．6　15．$-\frac{7}{9}$　16．$\sqrt{3}+2$

四、解答题： 本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．解：

（1）因为 $4a_n-3S_n=3$,

所以 $n\geq 2$ 时，$4a_{n-1}-3S_{n-1}=3$,

两式相减得到：$4(a_n-a_{n-1})-3(S_n-S_{n-1})=0$, 即 $a_n=4a_{n-1}$，（3 分）

又 $4a_1-3S_1=a_1=3$, 所以 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=4$，$n\geq 2$

数列 $\{a_n\}$ 为公比为 4 的等比数列。　（5 分）

（2）由（1）可知：$a_n=3\cdot 4^{n-1}(n\in N^*)$，

所以 $b_n=\frac{4}{3}a_n-2n+1=4^n-2n+1$，

$T_n=4^1-1+4^2-3+4^3-5+\cdots+4^n-2n+1$

$=(4^1+4^2+4^3+\cdots+4^n)-(1+3+5+\cdots+2n-1)$　（8 分）

$=\frac{4(1-4^n)}{1-4}-\frac{n(1+2n-1)}{2}=\frac{4^{n+1}-4}{3}-n^2$，

所以数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n=\frac{4^{n+1}-4}{3}-n^2$.（10 分）

18．解：

（1）$\because T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{3}\therefore\omega=3$　（2 分）

$\because$ 图像关于 $x=\frac{\pi}{4}$ 对称 $\therefore 3\cdot\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi\ \therefore\varphi=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

$\because -\frac{\pi}{2}<\varphi<0\ \therefore\varphi=-\frac{\pi}{4}$

$\therefore f(x)=\sin(3x-\frac{\pi}{4})$　（5 分）

（2）$\because f(A)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\therefore\sin(3A-\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore 3A-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}$或$3A-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$

$\therefore A=\frac{\pi}{2}$(舍)或$A=\frac{2\pi}{3}$ （8 分）

$\because \cos A=-\frac{1}{2}=\frac{4+16-a^2}{2\times 2\times 4}\therefore a=2\sqrt{7}$

在ΔABC 中由余弦定理得$\cos B=\frac{5\sqrt{7}}{14}$

在ΔABD 中由余弦定理得 $AD=\sqrt{3}$ （12 分）

19．解：

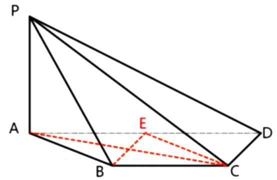
（1）取 AD 中点 E，连接 BE，AC，EC

∵AE∥BC 且 $AE=BC$ ∴四边形 $BCDE$ 为平行四边形 ∴$CE=AB=\sqrt{2}$

又∵$ED=CD=1$ 由 $ED^2+CD^2=CE^2$ 可得 $CD\perp AD$ （2 分）

∵$PA\perp$面 $ABCD$ ∴$PA\perp AB$ $PA\perp AC$ ∴$PC=\sqrt{6}$ $PB=\sqrt{3}$

∴ $\sin\angle BPC=\frac{1}{3}$， $\sin\angle ACB=\frac{\sqrt{5}}{5}$ （4 分）



图（1）

根据等体积法，$V_{P-ABC}=V_{A-PBC}$，

$\frac{1}{3}\times 1\times\sqrt{5}\times 1\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\times d_{A-PBC}\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$

∴$d_{A-PBC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ （6 分）

（2）法 1：建立如图空间直角坐标系

$A(2,0,0)$ $B(1,1,0)$ $C(0,1,0)$ $P(2,0,1)$

$\overrightarrow{AP}=(0,0,1)$ $\overrightarrow{BP}=(1,-1,1)$ $\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$（8 分）

分别设面 APB 和面 PBC 的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$

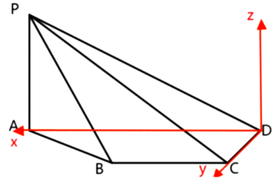
$\begin{cases} z_1=0 \\ x_1-y_1+z_1=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x_2=0 \\ x_2-y_2+z_2=0 \end{cases}$

分别令 y_1 和 y_2 为 1

可得$\overrightarrow{n_1}=(1,1,0)$ $\overrightarrow{n_2}=(0,1,1)$ （10 分）

$|\cos<\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}>|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{1}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$

故平面 PBA 与平面 PBC 的夹角为60^0． （12 分）



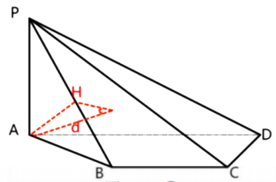
图（2）①

法 2：过 A 点作 $AH\perp PB$，可求 $AH=\frac{\sqrt{6}}{3}$ （10 分）

由（1）可知 $d_{A-PBC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

∴ $\sin\theta=\frac{d}{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ∴ $\cos\theta=\frac{1}{2}$

故平面 PBA 与平面 PBC 的夹角为60^0． （12 分）



图（2）②

20．解：

（1）由 $0.05+0.05+0.10+0.15+0.45+10a=1$，得 $a=0.020$，（3 分）

（2）（ⅰ）2×2 列联表补充完整如下：

	使用抖音配送方式	不使用抖音配送方式	总计
女性	30	20	50
男性	10	40	50
总计	40	60	100

零假设为 H_0：使用抖音配送方式与性别无关.

根据列联表中数据，经计算得 $\chi^2=\dfrac{100\times(30\times40-20\times10)^2}{40\times60\times50\times50}\approx16.667>10.828$，

依据小概率值α＝0.001 的独立性检验，我们推断零假设 H_0 不成立，即认为使用抖音配送方式与性别有关，该推断犯错误的概率不超过 0.001．（7 分）

（ⅱ）由题意得抽到的女性顾客的人数为 6，男性顾客的人数为 2．

则 X 的所有可能取值有 0，1，2，

$P(X=0)=\dfrac{C_2^0C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{28}$；

$P(X=1)=\dfrac{C_2^1C_6^2}{C_8^3}=\dfrac{15}{28}$；

$P(X=2)=\dfrac{C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\dfrac{3}{28}$；　　（10 分）

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{10}{28}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

故 $E(X)=0\times\dfrac{10}{28}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{3}{28}=\dfrac{3}{4}$．（12 分）

21．解：

（1）设 $F(-c,0)$，由 $\dfrac{c}{a}=\sqrt{2}$，则 $\dfrac{c^2}{a^2}=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=2$，

即 $a=b$，所以渐近线方程为 $y=\pm x$．（2 分）

又 F 到双曲线 E 的渐近线的距离为 $\sqrt{2}$，则 $\dfrac{c}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，即 $c=2,a=b=\sqrt{2}$．

所以双曲线方程为 $E:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$．（4 分）

（2）设 $B(x_0,y_0),C(-x_0,-y_0)$，直线 FB 的方程为 $x=\dfrac{x_0+2}{y_0}y-2$，

直线 FB 的方程与双曲线 $E:\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$ 联立，有 $(\dfrac{(x_0+2)^2}{{y_0}^2}-1)y^2-\dfrac{4(x_0+2)}{y_0}y+2=0$.（6 分）

又 ${x_0}^2-{y_0}^2=2$ ，则 $(2x_0+3)y^2-2(x_0+2)y_0y+{y_0}^2=0$

所以 $y_0y_A=\dfrac{{y_0}^2}{2x_0+3}$ ，即 $y_A=\dfrac{y_0}{2x_0+3}$ ，$x_A=\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3}$ （8 分）

（3）由（2）同理 $y_D=\dfrac{-y_0}{-2x_0+3}$ ，$x_D=\dfrac{3x_0-4}{-2x_0+3}$ ，

则 $k_{AD}=\dfrac{\dfrac{y_0}{2x_0+3}-\dfrac{-y_0}{-2x_0+3}}{\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3}-\dfrac{3x_0-4}{-2x_0+3}}=\dfrac{y_0(-2x_0+3)+y_0(2x_0+3)}{(-3x_0-4)(-2x_0+3)-(3x_0-4)(2x_0+3)}=-\dfrac{3y_0}{x_0}$ ，（10 分）

则直线 AD 方程为 $y-\dfrac{y_0}{2x_0+3}=-3\dfrac{y_0}{x_0}(x-\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3})$ ，

令 $y=0$ ，则 $\dfrac{1}{2x_0+3}=\dfrac{3}{x_0}(x-\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3})$ ，即 $x=\dfrac{x_0}{3(2x_0+3)}+\dfrac{-3x_0-4}{2x_0+3}=\dfrac{-4(2x_0+3)}{3(2x_0+3)}=-\dfrac{4}{3}$

所以直线 AD 过定点 $(-\dfrac{4}{3},0)$.　（12 分）

22. 解：

（1）当 $a=1$ 时，$f(x)=2e^x-((x-1)\oplus(x-1))=2e^x-\ln\left(e^{(x-1)}+e^{(x-1)}\right)$　　（2 分）

则 $f(x)=2e^x-(\ln 2+x-1)$，所以 $f(1)=2e-\ln 2$　　（4 分）

（2）由 $f(x)=2e^x-a((x-1)\oplus(x-1))=2e^x-a\ln\left(e^{(x-1)}+e^{(x-1)}\right)$，即 $f(x)=2e^x-a(\ln 2+x-1)$

则 $f'(x)=2e^x-a$　　（5 分）

当 $a\le 0$ 时，$f'(x)=2e^x-a\ge 0$ ，$\therefore f(x)$ 在 R 上是增函数，不成立。

当 $a>0$ 时，$f'(x)=2e^x-a=0$ ，得 $x=\ln\dfrac{a}{2}$ ，当 $x\in\left(\ln\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$ $\therefore f(x)$ 在 $\left(\ln\dfrac{a}{2},+\infty\right)$ 上是增函数，当 $x\in\left(-\infty,\ln\dfrac{a}{2}\right)$ 时，$f'(x)<0$ $\therefore f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\dfrac{a}{2}\right)$ 上是减函数

$\therefore x=\ln\dfrac{a}{2}$ 是 $f(x)$ 的极小值点，也是最小值点，且 $f(x)=f\left(\ln\dfrac{a}{2}\right)_{\min}=a(2-\ln a)$

要 $f(x)$ 有两个零点，$a(2-\ln a)<0\Rightarrow a>e^2$　　（7 分）

由 $f(x_1)=f(x_2)=0$ 得

$2e^{x_1}-a(\ln 2+x_1-1)=2e^{x_2}-a(\ln 2+x_2-1)=0$

$\dfrac{a}{2}=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2},ke^{x_1+x_2}<\dfrac{a^2}{4}\Rightarrow\sqrt{k}e^{\frac{x_1+x_2}{2}}<\dfrac{a}{2}=\dfrac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}\,(x_1<x_2)\Rightarrow\sqrt{k}e^{\frac{x_1+x_2}{2}}(x_1-x_2)>e^{x_1}-e^{x_2}$

两边同时除以 e^{x_1} 得，$\Rightarrow\sqrt{k}e^{\frac{x_2-x_1}{2}}(x_1-x_2)>1-e^{x_2-x_1}$ ，令 $t=\dfrac{x_2-x_1}{2}$ 则 $t>0$ ，

$-2\sqrt{k}e^t t>1-e^{2t}\Rightarrow 2\sqrt{k}e^t t-e^{2t}+1<0$

$h(t)=2\sqrt{k}e^t t-e^{2t}+1,t>0$

则 $h'(t)=2\sqrt{k}\left(e^t+e^t t\right)-2e^{2t}=-2e^t\left[e^t-\sqrt{k}(t+1)\right]$

记 $g(t)=e^t-\sqrt{k}(t+1),t>0$, 则 $g'(t)=e^t-\sqrt{k}$

若 $0<k\le 1$, 则 $g'(t)>0$, $g(t)$ 在 $(0,+\infty)\nearrow$ ，从而 $g(t)>g(0)=1-\sqrt{k}\ge 0$,

$\therefore h'(t)=-2e^t g(t)<0$ $\therefore h(t)$ 在 $(0,+\infty)\searrow$ $\therefore h(t)<h(0)=0$

即 $t>0$ 时有 $2\sqrt{k}e^t t-e^{2t}+1<0$

即 $\sqrt{k}e^{\frac{x_2-x_1}{2}}(x_1-x_2)>1-e^{x_2-x_1}\Rightarrow\sqrt{k}e^{\frac{x_1+x_2}{2}}(x_1-x_2)>e^{x_1}-e^{x_2}$ 恒成立，符合题意.（10 分）

若 $k>1$, 则当 $0<t<\ln\sqrt{k}$ 时， $g'(t)<0$, $g(t)$ 在 $\left(0,\ln\sqrt{k}\right)\searrow$ ，

当 $t>\ln\sqrt{k}$ 时， $g'(t)>0$, $g(t)$ 在 $\left(\ln\sqrt{k},+\infty\right)\nearrow$

$g(t)=g(\ln\sqrt{k})_{\min}=-\sqrt{k}\ln\sqrt{k}<0$, 又 $g(0)=1-\sqrt{k}<0$

$\therefore t\in\left(0,\ln\sqrt{k}\right), g(t)<0, h'(t)>0$

$h(t)$ 在 $\left(0,\ln\sqrt{k}\right)\nearrow$ ， $\therefore t\in\left(0,\ln\sqrt{k}\right), h(t)>h(0)=0$

即 $2\sqrt{k}e^t t-e^{2t}+1>0$ 不符合题意，综上 $k\in(0,1]$ （12 分）