2021－2022学年第一学期高三摸底考试

数　学

（考试时长：120分钟　总分：150分）

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷　（选择题　共60分）

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid y=\sqrt{\frac{x-4}{x-7}}\}$，集合 $B=\{3,4,5,6,7\}$，则 $A\cap B$

A. $(3,4)$　　B. $\{3,4\}$　　C. $[3,4]$　　D. $\{3,4,7\}$

2. 已知复数 $z=\frac{2i}{1-i}$，则 z 在复平面内对应的点所在的象限为

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知 $\{a_n\}$ 为等比数列，$\{b_n\}$ 为等差数列，$a_2=b_2=2$，$a_{10}=b_{10}=8$，则 $a_6+b_6=$

A. 9　　B. 1　　C. 9或1　　D. 以上都不对

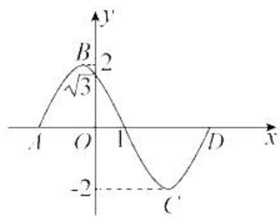
4. 攒尖顶是中国传统建筑屋顶表现手法，多用于面积不大的建筑，如故宫的中和殿。攒尖根据脊数多少，分三角攒尖顶、四角攒尖顶、六角攒尖顶、八角攒尖顶……，具有较强的艺术装饰效果。一建筑屋顶想采用攒尖形式，有三种设计方案，三角攒尖，四角攒尖，八角攒尖，若将三种方案中屋顶分别看成正三棱锥，正四棱锥，正八棱锥的侧面，且各正棱锥底面面积相同，各正棱锥侧面与底面所成角相等。那么三种设计中正棱锥侧面积最小的为

A. 三角攒尖　　B. 四角攒尖　　C. 八角攒尖　　D. 面积一样大

5. 已知 F_1,F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的两个焦点，点 M 在直线 $x-y+3=0$ 上，则 $|MF_1|+|MF_2|$ 的最小值为

A. $2\sqrt{13}$　　B. 6　　C. $\sqrt{26}$　　D. 5

6. 设函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$ 大致图像如右图，则



A. $A=2,\omega=\pi$　　B. $\omega=\frac{\pi}{3},\varphi=\frac{\pi}{3}$

C. $\omega=\frac{1}{3},\varphi=\frac{\pi}{3}$　　D. $\omega=\frac{\pi}{3},\varphi=\frac{2\pi}{3}$

7. 设函数 $f(x)=x^3-\sin x+x+1$，则满足 $f(x)+f(1-2x)<2$ 的 x 取值范围是

A. $(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $(-\infty,3)$

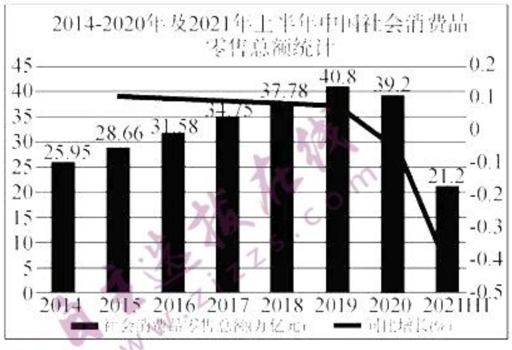
8. 已知点 P 为抛物线 $y^2=4x$ 上一动点，$A(1,0)$，$B(3,0)$，则 $\angle APB$ 的最大值为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 2021年7月15日国家统计局发布了我国上半年国内经济数据，面对复杂多变的国内外环境，在以习近平同志为核心的党中央坚强领导下，我国经济发展呈现稳中加固、稳中向好态势。初步核算，上半年国内生产总值532167亿元，市场销售逐步改善，消费升级类商品快速增长。上半年，社会消费品零售总额211904

亿元,同比增长 23.0%。根据下图国家统计局发布的数据,以下说法正确的是



A. 近年来中国社会消费品零售总额逐年攀升

B. 2019 年中国社会消费品零售总额达 40.8 万亿元,较 2018 年增加了 3.02 万亿元,同比增长 7.99%

C. 2020 年受新冠肺炎疫情影响,中国社会消费品零售总额同比增长率首次出现下滑

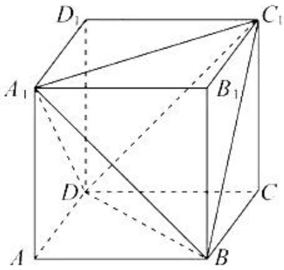
D. 2020 年上半年社会消费品零售总额约 172279.7 亿元

10. 已知函数 $f(x)=\ln x-ax$,则下列结论正确的是

A. $f(x)=0$ 有两个实数根,则 $0<a<\frac{1}{e}$　　B. $f(x)=0$ 有 1 个实数根,则 $a\leqslant 0$

C. $f(x)=0$ 无实数根,则 $a\geqslant\frac{1}{e}$　　D. 若 $f(x)=0$ 有两个实数根 x_1,x_2,则 $x_1x_2>e^2$

11. 右图中正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 边长为 2,则下列说法正确的是



A. 平面 $C_1BD\perp$ 平面 A_1BD

B. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 外接球与正四面体 A_1DBC_1 外接球半径相等均为 $\sqrt{3}$

C. 正四面体 A_1DBC_1 内切球半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. 四面体 A_1ADB 内切球半径为 $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$

12. $A=\begin{bmatrix} a_{11},a_{12}\cdots,a_{1m} \\ a_{21},a_{22}\cdots,a_{2m} \\ a_{31},a_{32}\cdots,a_{3m} \\ \cdots \\ a_{n1},a_{n2}\cdots,a_{nm}\end{bmatrix}$ 是由 $n\times m$ 个数 a_{ij}(复数或实数)排列成 n 行 m 列的长方阵,简称 $n\times m$ 矩阵,记做:$A_{n\times m}$,这 $n\times m$ 个数称为矩阵 A 的元素,简称为元,数 a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行第 j 列,称为矩阵 A 的 (i,j) 元。两个矩阵的乘法仅当第一个矩阵 A 的列数和第二个矩阵 B 的行数相等时才能定义(做乘法),如 A 是 $n\times m$ 矩阵,B 是 $m\times p$ 矩阵,记为 $AB=C$,它们的乘积 C 是一个 $n\times p$ 矩阵,它的任意一个元素值为:$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}=\sum\limits_{r=1}^{m}a_{ir}b_{rj}$。则下列选项中正确的是

A. $\begin{bmatrix}1&2\\4&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&2\\1&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&12\\3&23\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-1\end{bmatrix}$

C. 矩阵的乘法满足交换律 $AB=BA$　　D. 矩阵的乘法满足结合律 $(AB)C=A(BC)$

第Ⅱ卷 (非选择题　共 90 分)

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 若 $\vec{a},\vec{b}$ 均为单位向量,且 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$ ______.

14. 有甲乙等 5 名志愿者分配到冬奥会三个不同的运动场馆做服务工作,每个岗位至少 1 人,且甲乙二人必须在一起,则共有______(结果用数值表示)种不同的参加方法.

15. 若 $A=(5+\sqrt{17})^{30}$,则 A 的小数部分是______.

16. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点分别为 F_1、F_2,离心率为 e,过 F_1 作直线 $y=-\frac{b}{a}x$ 的垂线交双曲线右支于点 P,若 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$,则 $e^2=$______.

四、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)已知 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边,且 $\sin B\cos C-\sin A\cos B=\sin A\cos B-\sin C\cos B$.

(1)求角 B 的大小;

(2) $\overrightarrow{m}=\left(\sin^2\frac{A}{2},1\right)$, $\overrightarrow{n}=(2,\cos C)$，求 $\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}$ 的取值范围.

18. (12 分)数列 $\{a_n\}$ 对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，满足 $(4+a_n)(2-a_{n+1})=8$，且 $a_1=2$.

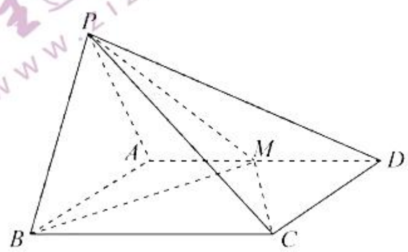
(1)求 a_n；

(2)若 $b_n=2^n a_n a_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

19. (12 分)如图所示，已知四棱锥 $P-ABCD$ 中，四边形 $ABCD$ 为正方形，三角形 PAB 为正三角形，侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$，M 是棱 AD 的中点.

(1)求证：$PC\perp BM$；

(2)求二面角 $B-PM-C$ 的正弦值.



20. (12 分)在我国,11 月 9 日的月日数恰好与火警电话号码 119 相同,而且这一天前后,正值风干物燥、火灾多发之际,全国各地都在紧锣密鼓地开展冬季防火工作. 为增加全民的消防安全意识,于 1992 年发起,公安部将每年的 11 月 9 日定为全国的“消防日”。为切实提高中学生消防安全知识,增强火灾的应对能力,某市特举办以“消防安全进万家,平安相伴你我他”为主题的知识竞赛,甲、乙同学将代表学校参加. 为取得好成绩,二人在消防知识题库中各随机选取 50 题练习,每题答对得 5 分,答错得 0 分,练习结果甲得 200 分,乙得 150 分. 若以二人练习中答题正确的频率作为竞赛答题正确的概率,回答下列问题.

(1)竞赛第一环节,要求甲乙二人各选两题做答,每题答对得 5 分,答错不得分,求甲乙二人得分和的概率分布列和期望.

(2)第二环节中,要求二人自选两道题或四道题做答,要求一半及一半以上正确才能过关,那么甲乙二人怎样选择,各自过关的可能性较大.

21. (12 分)在平面直角坐标系 xOy 中,已知椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为 $\frac{1}{2}$,椭圆的右焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合,过点 $P(m,0)(-a<m<a,m\neq0)$且不垂直于 x 轴 y 轴的直线与椭圆 C 交于 A,B 两点,点 $Q(n,0)$为椭圆 C 外一点,且$\angle AQP=\angle BQP$.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)mn 是否为定值? 若是定值,求出该定值,并给出证明;若不是定值,请说明理由.

22. (12 分)已知函数 $f(x)=xe^{2x}+t(x^2+x)$在 $\mathbf{R}$ 上可导,(其中 e 是自然对数的底数).

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性;

(2)当 $t=1$ 且 $x\geqslant0$ 时,证明 $f(x)\geqslant -x^3+x^2+2x$ 恒成立.

2021－2022学年第一学期高三摸底考试

数学参考答案

1. B　2. C　3. A　4. D　5. C　6. D　7. A　8. B　9. BD　10. AD　11. BCD　12. AD

13. $\sqrt{2}$　14. 36　15. $1-(5-\sqrt{17})^{30}$　16. $\frac{21+6\sqrt{3}}{3}$

17. 解：(1)因为 $\sin B\cos C-\sin A\cos B=\sin A\cos B-\sin C\cos B$，

得 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=2\sin A\cos B$. ………………………… 2分

即 $\sin A=2\sin A\cos B$

角 A 为△ABC 的内角

得 $2\cos B=1$，$\cos B=\frac{1}{2}$ ………………………… 2分

$B=\frac{\pi}{3}$ ………………………… 1分

(2) $\vec{m}=(\sin^2\frac{A}{2},1)$，$\vec{n}=(2,\cos C)$，

$\vec{m}\cdot\vec{n}=2\sin^2\frac{A}{2}+\cos C=1-\cos A+\cos(\frac{2\pi}{3}-A)$ ………………………… 1分

$=1-\cos A-\frac{1}{2}\cos A+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\frac{3}{2}\cos A+1$

$=\sqrt{3}\sin(A-\frac{\pi}{3})+1$ ………………………… 2分

$B=\frac{\pi}{3}$，$A\in(0,\frac{2\pi}{3})$，$A-\frac{\pi}{3}\in(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$

$\sin(A-\frac{\pi}{3})\in(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\sqrt{3}\sin(A-\frac{\pi}{3})+1\in(-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$ ………………………… 2分

18. 解：(1)由题意 $(4+a_n)(2-a_{n+1})=8$

解得 $8-4a_{n+1}+2a_n-a_na_{n+1}=8$

$2a_n-4a_{n+1}=a_na_{n+1}$ ………………………… 2分

$\frac{2}{a_{n+1}}-\frac{4}{a_n}=1$

$\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{4}{a_n}+1$ ………………………… 1分

$\frac{2}{a_{n+1}}=2\left(\frac{2}{a_n}+1\right)$ ………………………… 1分

$\because a_1=2$　$\therefore \frac{2}{a_1}+1=2$

$\left\{\frac{2}{a_n}+1\right\}$是以2为首项，2为公比的等比数列 ………………………… 1分

$\therefore \frac{2}{a_n}+1=2^n$　$a_n=\frac{2}{2^n-1}$ ………………………… 1分

(2) $b_n=2^n a_n a_{n+1}=2^n\dfrac{2}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}$ ······ 2 分

$=\dfrac{4\cdot 2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=4\left(\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$ ······ 2 分

$\therefore S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n$

$=4\left(\dfrac{1}{2^1-1}-\dfrac{1}{2^2-1}+\cdots+\dfrac{1}{2^n-1}-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

$=4\left(1-\dfrac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

$=4-\dfrac{4}{2^{n+1}-1}$ ······ 2 分

19. **解**:(1) 方法一:

取 AB 的中点 O,连接 OP,OC

$\because$ 三角形 PAB 为正三角形且侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$

$\therefore PO\perp$ 底面 $ABCD$

$\because BM\subset$ 底面 $ABCD$

$\therefore PO\perp BM$

$\because \mathrm{Rt}\triangle ABM\cong \mathrm{Rt}\triangle BCO$

$\therefore \angle AMB=\angle BOC$

$\therefore \angle ABM+\angle AMB=\angle ABM+\angle BOC=90^\circ$

$\therefore BM\perp OC$

$\because PO\cap OC=O$

$\therefore BM\perp$ 平面 POC

$\because PC\subset$ 平面 POC

$\therefore BM\perp PC$ ······ 4 分

方法二:

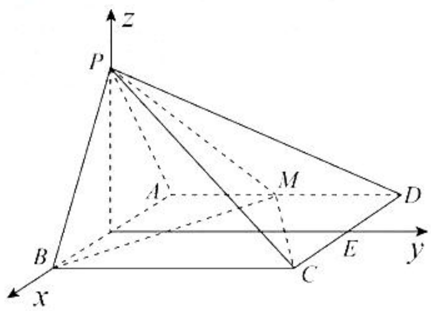
取 AB 的中点 O,连接 OP,并过 O 点作 BC 的平行线 OE,交 CD 于 E,则 $OE\perp AB$

$\because$ 三角形 PAB 为正三角形

$\therefore PO\perp AB$

$\because$ 平面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$ 且平面 $PAB\cap$ 底面 $ABCD=AB$

$\therefore PO\perp$ 底面 $ABCD$



以 O 为坐标原点,$\overrightarrow{OB}$ 的方向为 x 轴正方向,建立如图所示空间直角坐标系,令 $PB=AB=2$,

则 $B(1,0,0)$ $P(0,0,\sqrt{3})$ $M(-1,1,0)$ $C(1,2,0)$ ······ 2 分

$\overrightarrow{PC}=(1,2,-\sqrt{3})$ $\overrightarrow{BM}=(-2,1,0)$

$\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{OM}=1\times(-2)+2\times1+(-\sqrt{3})\times0=0$

$\therefore PC\perp BM$ ······ 2 分

(2) $\overrightarrow{PM}=(-1,1,-\sqrt{3})$ $\overrightarrow{CM}=(-2,-1,0)$

设平面 PMB 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PM}\cdot\vec{m}=0\\ \overrightarrow{BM}\cdot\vec{m}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y-\sqrt{3}z=0\\ -2x+y=0\end{cases}$

令 $x=1$,$\vec{m}=(1,2,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$ ······ 2 分

设平面 PMC 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\overrightarrow{PM}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{CM}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x+y-\sqrt{3}z=0\\ -2x-y=0\end{cases}$

令 $x=1,\overrightarrow{n}=(1,-2,\sqrt{3})$ ………………………………………………………………………… 2 分

$\cos<\overrightarrow{m},\overrightarrow{n}>=\dfrac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ ………………………………………………………………… 2 分

$\sin<\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}>=\sqrt{1-(\dfrac{\sqrt{6}}{4})^2}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$

∴ 二面角 $B-PM-C$ 的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{4}$ ……………………………………………………………… 2 分

20. **解**：(1)由已知得，甲答题的正确率为 0.8，乙答题的正确率为 0.6，设甲乙二人得分和的随机变量为 X，则 X 的可能取值为 0,5,10,15,20 ………………………………………………………………………… 2 分

$P(X=0)=(0.2)^2\times(0.4)^2=0.0064$

$P(X=5)=C_2^1 0.2\times0.8\times(0.4)^2+C_2^1(0.2)^2\times0.4\times0.6=0.0704$

$P(X=10)=(0.2)^2\times(0.6)^2+(0.8)^2\times(0.4)^2+C_2^1 0.2\times0.8\times C_2^1 0.4\times0.6=0.2704$

$P(X=15)=C_2^1 0.2\times0.8\times(0.6)^2+C_2^1(0.8)^2\times0.4\times0.6=0.4224$

$P(X=20)=(0.8)^2\times(0.6)^2=0.2304$ ………………………………………………………………… 3 分

X 的分布列为

X	0	5	10	15	20
P	0.0064	0.0704	0.2704	0.4224	0.2304

$E(X)=0\times0.0064+5\times0.0704+10\times0.2704+15\times0.4224+20\times0.2304=14$ ………………… 3 分

(2)甲选 2 题时，过关率为 $1-(0.2)^2=0.96$

甲选 4 题时，过关率为 $1-(0.2)^4-C_4^1 0.8\times(0.2)^3=0.9728$

∴ 甲选 4 道题 ………………………………………………………………………………………… 2 分

乙选 2 题时，过关率为 $1-(0.4)^2=0.84$

乙选 4 题时，过关率为 $1-(0.4)^4-C_4^1 0.6\times(0.4)^3=0.8208$

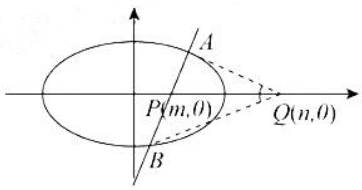
∴ 乙选 2 道题 ………………………………………………………………………………………… 2 分

21. **解**：(1)由题意 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}\cdot c=1$ ……………………………………………………………… 1 分

∴ $a=2,a^2=4,b^2=a^2-c^2=3$ ………………………………………………………………… 1 分

∴ 椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ ……………………………………………………………… 2 分

(2)设直线 AB 为 $x=py+m$



则 $\begin{cases}x=py+m\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1\end{cases}$

$(3p^2+4)y^2+6pmy+3m^2-12=0$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

则 $y_1+y_2=\dfrac{-6pm}{3p^2+4},y_1y_2=\dfrac{3m^2-12}{3p^2+4}$ ……………………………………………………… 4 分

又∵ $\angle AQP=\angle BQP$

∴ $\dfrac{y_1}{x_1-n}+\dfrac{y_2}{x_2-n}=0$

得 $y_1(py_2+m-n)+y_2(py_1+m-n)=0$

$2py_1y_2+(m-n)(y_1+y_2)=0$ ……………………………………………………………… 2 分

将 $y_1+y_2=\dfrac{-6pm}{3p^2+4},y_1y_2=\dfrac{3m^2-12}{3p^2+4}$ 代入上式

得 $mn=4$ ………………………………………………………………………………………… 2 分

22. 解:(1)$f'(x)=(2x+1)e^{2x}+t(2x+1)=(2x+1)(e^{2x}+t)$ ………………………… 1 分

①当 $t\geqslant 0$ 时,令 $f'(x)=0$ 得 $x=-\frac{1}{2}$

且 $x<-\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)<0$

$x>-\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)>0$

此时 $f'(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 单减,在 $(-\frac{1}{2},+\infty)$ 单调递增 ………………………… 1 分

②当 $t<0$ 时,令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=-\frac{1}{2}$,$x_2=\frac{1}{2}\ln(-t)$

Ⅰ. 若 $-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln(-t)$

即 $t=-\frac{1}{e}$,$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增 ………………………… 1 分

Ⅱ. 若 $-\frac{1}{2}>\frac{1}{2}\ln(-t)$,即 $-\frac{1}{e}<t<0$ 时

$x<\frac{1}{2}\ln(-t)$ 时,$f'(x)>0$

$\frac{1}{2}\ln(-t)<x<-\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)<0$

$x>-\frac{1}{2}$ 时,$f'(x)>0$

此时 $f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}\ln(-t))$,$(-\frac{1}{2},+\infty)$ 单增,$f(x)$ 在 $(\frac{1}{2}\ln(-t),-\frac{1}{2})$ 单减 ………………………… 1 分

Ⅲ. $-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}\ln(-t)$,即 $t<-\frac{1}{e}$ 时

$f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$,$(\frac{1}{2}\ln(-t),+\infty)$ 单增,$f(x)$ 在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\ln(-t))$ 单减 ………………………… 1 分

综上所述:当 $t\geqslant 0$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$ 单减,$(-\frac{1}{2},+\infty)$ 单增

当 $t=-\frac{1}{e}$ 时,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单增

当 $-\frac{1}{e}<t<0$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1}{2}\ln(-t))$,$(-\frac{1}{2},+\infty)$ 单增,$(\frac{1}{2}\ln(-t),-\frac{1}{2})$ 单减

当 $t<-\frac{1}{e}$ 时,$f(x)$ 在 $(-\infty,-\frac{1}{2})$,$(\frac{1}{2}\ln(-t),+\infty)$ 单增,$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\ln(-t))$ 单减 ………………………… 1 分

(2)欲证 $f(x)\geqslant -x^3+x^2+2x$ 恒成立

即证 $x\cdot e^{2x}+x^2+x\geqslant -x^3+x^2+2x$

$x\cdot e^{2x}+x^3\geqslant x$ ………………………… 1 分

当 $x=0$ 时 $x\cdot e^{2x}+x^3=x$ ………………………… 1 分

当 $x>0$ 时,只需证 $e^{2x}+x^2>1$

$\because e^x>x+1$

$\therefore e^x-x>1$

得 $e^{2x}-2x\cdot e^x+x^2>1$

$\because 2x\cdot e^x>0$

$\therefore e^{2x}+x^2>1$,原式得证 ………………………… 4 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’专业、专注、有态度 ‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。