2021年高考精准备考原创押题卷(一)·数学(理科)

[满分150分,用时120分钟]

注意事项:

1. 答题前,考生务必将自己的学校、姓名、班级、准考证号填写在答题卡上相应的位置。
2. 全部答案在答题卡上完成,答在本试卷上无效。
3. 回答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用0.5毫米及以上黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
4. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

参考公式:锥体的体积公式:$V=\frac{1}{3}Sh$(其中S为锥体的底面积,h为锥体的高)

一、选择题(本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合$A=\{x|1\leqslant x\leqslant 2\}$,$B=\{y|y=2x+a,x\in A\}$,若$A\subseteq B$,则实数$a$的取值范围为 ( )

A. $[1,2]$　B. $[-1,1]$　C. $[-2,2]$　D. $[-2,-1]$

2. 复数$\frac{4i}{1+\sqrt{3}i}$的虚部为 ( )

A. i　B. $-$i　C. 1　D. -1

3. 已知样本数据为x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,该样本平均数为4,方差为2,现加入一个数4,得到新样本的平均数为$\overline{x}$,方差为s^2,则 ( )

A. $\overline{x}>4,s^2>2$　B. $\overline{x}=4,s^2>2$　C. $\overline{x}<4,s^2<2$　D. $\overline{x}=4,s^2<2$

4. 某工厂产生的废气经过过滤后排放,过滤过程中废气的污染物数量P(mg/L)与时间t(h)之间的关系为$P=P_0e^{-kt}$.如果前2小时消除了20%的污染物,则污染物减少50%大约需要的时间为(参考数据:$\ln 2\approx 0.69$,$\ln 3\approx 1.10$,$\ln 5\approx 1.61$) ( )

A. 4 h　B. 6 h　C. 8 h　D. 10 h

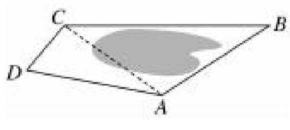
5. 设抛物线$C:y^2=4x$的焦点为F,点A是抛物线C的准线与x轴的交点,若抛物线C上的点M满足$|MA|=\sqrt{2}|MF|$,则$|MF|=$ ( )

A. 4　B. $2\sqrt{2}$　C. 2　D. $\sqrt{2}$

6. 在平行四边形$ABCD$中,$AB=2BC=2$,M是CD的中点,若$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DC}=3$,则$\angle BAD=$ ( )

A. $\frac{\pi}{4}$　B. $\frac{\pi}{3}$　C. $\frac{2\pi}{3}$　D. $\frac{3\pi}{4}$

7. 如图,为了测量A,C两点间的距离,选取同一平面上的B,D两点,测出四边形$ABCD$各边的长度(单位:km):$AB=5$,$BC=8$,$CD=3$,$DA=5$,且$\angle B$与$\angle D$互补,则AC的长为 ( )



A. 6 km　B. 7 km　C. 8 km　D. 9 km

8. 已知 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$，则 $\tan\theta=$ （　　）

A. 7　　B. $\frac{12}{5}$　　C. $\frac{4}{3}$　　D. $\frac{1}{7}$

9. 在《通用技术》课上，某小组同学准备用一个棱长为 6 的正四面体坯料制作一个正三棱柱模型（其底面在正四面体的一个面上），要求削去的材料尽可能少，则所制作的正三棱柱模型的高为 （　　）

A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}$　　B. $\frac{4\sqrt{6}}{3}$　　C. 4　　D. $2\sqrt{6}$

10. 在平面直角坐标系 xOy 中，$A(3,0)$，$B(0,-3)$，点 M 满足$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$x+y=1$，点 N 为曲线 $y=\sqrt{-x^2-2x}$上的动点，则$|MN|$的最小值为 （　　）

A. $2\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}-1$　　C. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　D. $\frac{3\sqrt{2}}{2}-1$

11. 设双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为 F_1，F_2，过 F_2 的直线与双曲线的右支交于两点 A，B，若$|AF_1|:|AB|=3:4$，且 F_2 是 AB 的一个四等分点，则双曲线 C 的离心率是 （　　）

A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. 5

12. 设 $a=2\ 022\ln 2\ 020$，$b=2\ 021\ln 2\ 021$，$c=2\ 020\ln 2\ 022$，则 （　　）

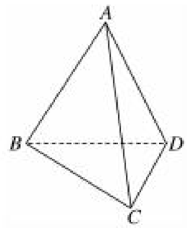
A. $a>c>b$　　B. $c>b>a$　　C. $b>a>c$　　D. $a>b>c$

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 若实数 x,y 满足$\begin{cases}x+3\geqslant y,\\x+y\leqslant 3,\\x\leqslant 2y,\end{cases}$则 $z=2x+y$ 的最大值为________.

14. $\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的常数项是________.（用数字作答）

15. 如图，在三棱锥 A-BCD 中，$BC=CD=BD=2\sqrt{2}$，$AB=AC=AD=2a$，若该三棱锥的侧面积是底面积的 $\sqrt{3}$ 倍，则该三棱锥外接球的表面积为________.



16. 已知函数 $f(x)=\frac{\ln x-1}{x}$，下列命题中：

①$f(x)$在其定义域内有且仅有 1 个零点；

②$f(x)$在其定义域内有且仅有 1 个极值点；

③$\exists x_1,x_2\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$；

④$\forall x_1\in(0,+\infty)$，$\exists x_2\in(0,+\infty)$，使得 $f(x_1)<f(x_2)$；

⑤当 $x>1$ 时，函数 $y=f(x)$的图象总在函数 $y=1-\frac{2}{x}$的图象的下方.

其中真命题有________.（写出所有真命题的序号）

三、解答题(共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答.第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答)

(一)必考题(共 60 分)

17.(12 分)已知数列$\{a_n\}$满足 $2a_n=3a_{n+1}-a_{n+2}$,$a_2-a_1=1$.

(1)求证:数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列;

(2)若 $a_1=\frac{1}{2}$,求数列$\{a_n\}$的通项公式.

18.(12 分)某数学兴趣小组为了探究参与某项老年运动是否与性别有关的问题,对城区 60 岁以上老人进行了随机走访调查.得到的数据如表:

	男性	女性	总计
参与该项老年运动	16	p	x
不参与该项老年运动	44	q	y
总计	60	40	100

从统计数据中分析得出,参与该项老年运动的被调查者中,女性的概率是$\frac{1}{3}$.

(1)求 2×2 列联表中 p,q,x,y 的值;

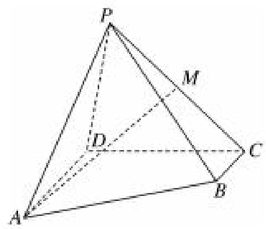
(2)是否有 90%的把握认为参与该项老年运动与性别有关?

(3)若将参与该项老年运动的老人称为"健康达人",现从参与调查的"健康达人"中按性别采用分层抽样的方法抽取 6 人,再从这 6 人中随机抽取 2 人进行健康状况跟踪调查,那么被跟踪调查的 2 人中都是男性的概率是多少?

参考公式及数据:$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geqslant k_0)$	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

19.(12 分)如图,在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为直角梯形,$AD/\!/BC$,$\angle ADC=90°$,二面角 $P\text{-}AD\text{-}C$ 的余弦值为$\frac{1}{3}$,M 是棱 PC 的中点,$PA=PD=AD=2$,$BC=1$,$CD=\sqrt{3}$.



(1)求证:$AD\perp PB$;

(2)求直线 MA 与平面 PAD 所成角的正弦值.

20.(12分)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 经过点 $A\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,其长半轴长为2.

(1)求椭圆 C 的方程;

(2)设经过点 $B(-1,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 D,E 两点,点 E 关于 x 轴的对称点为 F,直线 DF 与 x 轴相交于点 G,求△DEG 的面积 S 的取值范围.

21.(12分)已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2+x$.

(1)若 $f(x)$ 单调递增,求实数 a 的取值范围;

(2)若函数 $F(x)=f(x+1)-3x-2$ 有两个极值点 x_1,x_2,且 $x_1<x_2$,求证:$F(x_2)+\left(\frac{1}{2}-\ln 2\right)x_1>0$.

(二)选考题(共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做,则按所做的第一题计分)

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在平面直角坐标系中,曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=t\cos\alpha,\\ y=t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数),以坐标原点 O 为极点,x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta=3$.

(1)求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2)曲线 C_1 与 C_2 相交于 A,B 两点,求 $|OA|\cdot|OB|$ 的值.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=|x|$.

(1)求不等式 $f(x-1)+f(2x-1)\leqslant 2x$ 的解集;

(2)若 $a>0,b>0,c>0$,且 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$,证明:$f(x+a)+f(x-b-c)\geqslant 36$.

2021 年高考精准备考原创押题卷(一)·数学(理科)参考答案

1. 选 D　由题意,集合 $A=[1,2]$,可得 $B=\{y|y=2x+a,x\in A\}=[a+2,a+4]$,

因为 $A\subseteq B$,所以 $\begin{cases}a+2\leqslant 1,\\ a+4\geqslant 2,\end{cases}$ 解得 $a\in[-2,-1]$. 故选 D.

2. 选 C　$\frac{4i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{4i(1-\sqrt{3}i)}{4}=\sqrt{3}+i$,所以虚部为 1. 故选 C.

3. 选 D　x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数为 4,方差为 2,

则加入 4 后平均数为 $\bar{x}=\frac{1}{6}\times(4\times 5+4)=4$.

方差为 $s^2=\frac{1}{6}\times[5\times 2+(4-4)^2]=\frac{5}{3}<2$. 故选 D.

4. 选 B　由题意得,$P_0e^{-2k}=0.8P_0$,

所以 $-2k=\ln 0.8$,$k=-\frac{\ln 0.8}{2}$. 故 $P=P_0e^{\frac{\ln 0.8}{2}t}=P_0(0.8)^{\frac{t}{2}}$.

若污染物减少 50%,则 $P_0(0.8)^{\frac{t}{2}}=0.5P_0$,

可得 $\frac{t}{2}=\log_{0.8}0.5=\frac{\ln 0.5}{\ln 0.8}=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\ln\frac{4}{5}}=\frac{-\ln 2}{2\ln 2-\ln 5}=$

$\frac{\ln 2}{\ln 5-2\ln 2}\approx\frac{0.69}{1.61-2\times 0.69}=3$,

故 $t=6$,故选 B.

5. 选 C　由已知得抛物线的焦点为 $F(1,0)$,准线方程是 $x=-1$,$A(-1,0)$,

设 $M(x,y)$,则由 $|MA|=\sqrt{2}|MF|$,

得 $\sqrt{(x+1)^2+y^2}=\sqrt{2}(x+1)$,又 $y^2=4x$,

所以 $(x+1)^2+4x=2(x+1)^2$,解得 $x=1$.

$|MF|=1+1=2$,故选 C.

6. 选 B　$\because \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2=1\times 2\times\cos\angle BAD+\frac{1}{2}\times 4=3$,

$\therefore\cos\angle BAD=\frac{1}{2}$,又 $\angle BAD\in(0,\pi)$,$\therefore\angle BAD=\frac{\pi}{3}$.

故选 B.

7. 选 B　由题意知,$\cos B=\frac{5^2+8^2-AC^2}{2\times 5\times 8}$.

$\cos D=\frac{3^2+5^2-AC^2}{2\times 3\times 5}$,因为 $\angle B$ 与 $\angle D$ 互补,

所以 $\cos B+\cos D=0$,所以 $\frac{5^2+8^2-AC^2}{2\times 5\times 8}+\frac{3^2+5^2-AC^2}{2\times 3\times 5}=0$,解得 $AC=7$. 故选 B.

8. 选 A　因为 $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$,所以 $\theta+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4}\right)$,

又 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4}{5}$,

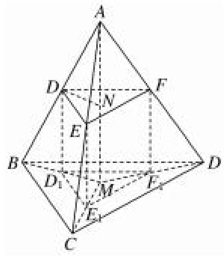
所以 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{5}$,则 $\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{4}{3}$,

所以 $\tan\theta=\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=$

$\frac{\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{-\frac{4}{3}-1}{1-\frac{4}{3}}=7$.

故选 A.

9. 选 A　如图,正四面体 A-BCD 的内接正三棱柱 DEF-$D_1E_1F_1$,且 D,E,F 三个顶点必在四面体的三条棱上,才能使得三棱柱体积最大,正四面体 A-BCD 的棱长为 6,则高为 $AM=$



$\sqrt{6^2-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6\right)^2}=2\sqrt{6}$,

设正三棱柱高为 h,底面边长为 a,

因为平面 DEF∥平面 BCD,

所以 $\frac{a}{6}=\frac{2\sqrt{6}-h}{2\sqrt{6}}$,则 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}(2\sqrt{6}-h)$,

故 $S_{\triangle DEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{6}{4}(2\sqrt{6}-h)^2=\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot(2\sqrt{6}-h)^2$,

所以 $V_{DEF\text{-}D_1E_1F_1}=S_{\triangle DEF}\cdot h=\frac{3\sqrt{3}}{8}h(2\sqrt{6}-h)^2=$

$\frac{3\sqrt{3}}{16}\times 2h\times(2\sqrt{6}-h)\times(2\sqrt{6}-h)\leqslant\frac{3\sqrt{3}}{16}\times\left(\frac{2h+2\sqrt{6}-h+2\sqrt{6}-h}{3}\right)^3=8\sqrt{2}$.

当且仅当 $2h=2\sqrt{6}-h$,即 $h=\frac{2\sqrt{6}}{3}$ 时等号成立.

故选 A.

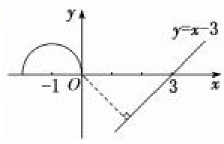
10. 选 C　$k_{AB}=\frac{-3-0}{0-3}=1$,则直线 AB 的方程是 $y=x-3$.

$\because$ 点 M 满足 $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,$x+y=1$,

$\therefore$ 点 M 在直线 $AB:y=x-3$ 上,

又点 N 在曲线 $(x+1)^2+y^2=1$ $(y\geqslant 0)$ 上,

如图,$|MN|$ 的最小值是点 O 到直线 $y=x-3$ 的距离,故



$|MN|_{\min}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 故选 C.

11. 选 B　由 $|AF_1|:|AB|=3:4$,可设 $|AF_1|=3m$,$|AB|=4m$,又 F_2 是 AB 的一个四等分点,

若 $|BF_2|=\frac{1}{4}|AB|$,则 $|BF_2|=m$,$|AF_2|=3m$,但此时 $|AF_1|-|AF_2|=3m-3m=0$,再由双曲线的定义,得 $|AF_1|-|AF_2|=2a$,得到 $a=0$,这与 $a>0$ 矛盾;

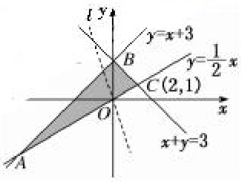
若 $|AF_2|=\frac{1}{4}|AB|$,则 $|AF_2|=m$,$|BF_2|=3m$,由双曲线的定义,

得 $\begin{cases}|AF_1|-|AF_2|=2m=2a,\\ |BF_1|-|BF_2|=|BF_1|-3m=2a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=a,\\ |BF_1|=5a,\end{cases}$

则此时满足 $|AF_1|^2+|AB|^2=|BF_1|^2$，
所以 $\triangle ABF_1$ 是直角三角形，且 $\angle BAF_1=90°$，
所以由勾股定理，得 $|AF_1|^2+|AF_2|^2=|F_1F_2|^2\Rightarrow$
$(3a)^2+a^2=(2c)^2$，得 $e=\frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 B.

12. 选 D　令 $f(x)=(4\ 042-x)\ln x$，则 $f'(x)=-\ln x+\frac{4\ 042}{x}-1$，从而 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，
且 $f'(2\ 020)=-\ln 2\ 020+\frac{4\ 042}{2\ 020}-1<0$，
因此 $f'(x)<0$ 对 $\forall x\in(2\ 020,+\infty)$ 恒成立，
所以 $f(x)$ 在 $(2\ 020,+\infty)$ 上单调递减，
所以 $f(2\ 020)>f(2\ 021)>f(2\ 022)$，
即 $2\ 022\ln 2\ 020>2\ 021\ln 2\ 021>2\ 020\ln 2\ 022$. 故选 D.

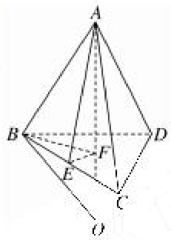
13. **解析**：作出不等式组



$\begin{cases}x+3\geqslant y,\\ x+y\leqslant 3,\\ x\leqslant 2y\end{cases}$ 所表示的平面区域
如图中阴影部分所示.
作出直线 l：$y=-2x$，并进行平移，观察可知，当直线 l 过点 $C(2,1)$ 时，z 有最大值为 5.
答案：5

14. **解析**：$\left(2\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^6$ 的二项展开式中的第 $r+1$ 项
$T_{r+1}=C_6^r(2\sqrt{x})^{6-r}\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^r=(-1)^r\cdot 2^{6-r}\cdot C_6^r\cdot x^{\frac{12-3r}{4}}$，令 $\frac{12-3r}{4}=0$，则 $r=4$，常数项 $T_5=(-1)^4\cdot 2^{6-4}\cdot C_6^4=60$.
答案：60

15. **解析**：如图，取 BC 边的中点 E，$\triangle BCD$ 外接圆的圆心为 F，三棱锥 $A\text{-}BCD$ 外接球球心为 O. 因为 $AB=AC$，且点 E 为 BC 的中点，所以 $AE=\sqrt{4a^2-2}$，由此可知三棱锥 $A\text{-}BCD$ 的侧面积 $S_{侧}=3\times\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{4a^2-2}=6\sqrt{2a^2-1}$.



又底面 $\triangle BCD$ 的面积为 $2\sqrt{3}$.
所以 $6\sqrt{2a^2-1}=\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}$，解得 $a=1$（舍负）.
设三棱锥 $A\text{-}BCD$ 外接球的半径为 R，$OF=x$.
因为 $AB=AC=AD=2$，
所以点 A 在底面 BCD 上的射影为点 F.
因为 $AB<BC$，
所以三棱锥外接球球心 O 在直线 AF 的延长线上.
由 BF 为 $\triangle BCD$ 外接圆的半径，可得 $BF=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.
在 $Rt\triangle ABF$ 中，由勾股定理可得 $(R-x)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=4$，①
在 $Rt\triangle OBF$ 中，由勾股定理可得 $x^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2=R^2$，②
联立①②，解得 $R=\sqrt{3}$，$x=\frac{\sqrt{3}}{3}$，
所以外接球的表面积 $S=4\pi R^2=12\pi$.
答案：12π

16. **解析**：$f'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$，$x>0$，令 $f'(x)=0$，有 $x=e^2$，
$0<x<e^2$ 时，$f'(x)>0$；$x>e^2$ 时，$f'(x)<0$，
$f(e^2)=e^{-2}>0$，又 $x>e$ 时，$f(x)>0$，而 $f(e)=0$，故 $f(x)$ 有且只有一个零点，①正确；
导数为 0 的点附近的导数值符号不同，故 e^2 为极值点，②正确；
令 $h(x)=f(x)-\frac{1}{2}e^{-2}$，由上面分析知，$h(x)$ 在 (e,e^2) 上必有一个零点，又 $h(e^3)=\frac{4-e}{2e^3}>0$，
$h(e^4)=\frac{6-e^2}{2e^4}<0$，故 $h(x)$ 在 (e^3,e^4) 上有另一个零点，
所以 $\exists x_1,x_2\in(0,+\infty)$，使 $h(x_1)=h(x_2)=0$，
即 $f(x_1)=f(x_2)=\frac{1}{2}e^{-2}$，③正确；
取 $x_1=e^2$，$f(e^2)$ 为极大值也为最大值，故不存在 x_2 使得 $f(x_1)<f(x_2)$，④错误；
令 $g(x)=1-\frac{2}{x}-\frac{\ln x-1}{x}=1-\frac{\ln x+1}{x}$，
则 $g'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)>g(1)=0$，即 $x>1$ 时，$1-\frac{2}{x}>\frac{\ln x-1}{x}$，函数 $y=f(x)$ 的图象在函数 $y=1-\frac{2}{x}$ 的图象的下方，⑤正确.
答案：①②③⑤

17. **解**：(1)依题意 $2a_n=3a_{n+1}-a_{n+2}$，所以 $a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$，……………………2 分
又 $a_2-a_1\neq 0$，所以 $a_{n+1}-a_n\neq 0$，所以 $\frac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=2$.……………………4 分
故数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是首项为 $a_2-a_1=1$，公比为 2 的等比数列，所以 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$.……………………6 分
(2)由(1)得 $a_{n+1}-a_n=2^{n-1}$，所以 $a_n-a_{n-1}=2^{n-2}$ $(n\geqslant 2)$，……………………8 分
所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2^0+\frac{1}{2}$……………………10 分
$=\frac{1-2^{n-1}}{1-2}+\frac{1}{2}=2^{n-1}-\frac{1}{2}$.
即 $a_n=2^{n-1}-\frac{1}{2}$. ……………………12 分

18. **解**：(1)由题意得 $\frac{p}{p+16}=\frac{1}{3}$，解得 $p=8$，所以 $q=40-8=32$，所以 $x=16+8=24$，$y=44+32=76$. ………3 分
(2)由列联表中的数据可得 K^2 的观测值
$K^2=\frac{100\times(16\times 32-8\times 44)^2}{60\times 40\times 24\times 76}\approx 0.$

所以没有90%的把握认为参与该项老年运动与性别有关. ……6分

(3)由(1)得"健康达人"共有24人,其中男性16人,女性8人,所以抽样比 $k=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$,

因此按性别分层抽样抽取的6人中有男性 $16\times\frac{1}{4}=4$ 人,记为 A_1,A_2,A_3,A_4,

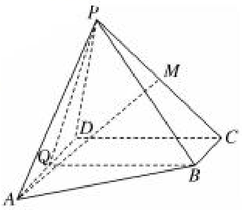
女性 $8\times\frac{1}{4}=2$ 人,记为 B_1,B_2, ……8分

从这6人中抽取2人的所有方式有 $(A_1,A_2),(A_1,A_3),(A_1,A_4),(A_1,B_1),(A_1,B_2),(A_2,A_3),(A_2,A_4),(A_2,B_1),(A_2,B_2),(A_3,A_4),(A_3,B_1),(A_3,B_2),(A_4,B_1),(A_4,B_2),(B_1,B_2)$,共15种情况, ……10分

其中符合题目要求的有6种情况,

所以被跟踪调查的全是男性的概率 $P=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. ……12分

19. **解**:(1)证明:取 AD 的中点 Q,连接 PQ,BQ,如图所示.



因为 $PA=PD$,所以 $PQ\perp AD$. ……1分

由题意知 $BC\parallel AD$, $BC=\frac{1}{2}AD$,

又 $QD=\frac{1}{2}AD$,所以 $BC\parallel QD$ 且 $BC=QD$,

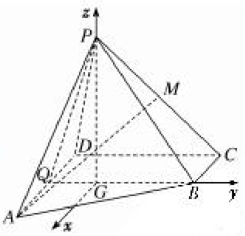
所以四边形 $BCDQ$ 为平行四边形,所以 $CD\parallel BQ$,

因为 $\angle ADC=90°$,所以 $DC\perp AD$,所以 $BQ\perp AD$. ……3分

又 $PQ\subset$ 平面 PBQ, $BQ\subset$ 平面 PBQ, $PQ\cap BQ=Q$,所以 $AD\perp$ 平面 PBQ, ……4分

又 $PB\subset$ 平面 PBQ,所以 $AD\perp PB$. ……5分

(2)由 $AD\perp$ 平面 PBQ, $AD\subset$ 平面 $ABCD$,得平面 $PBQ\perp$ 平面 $ABCD$,过点 P 作 $PG\perp BQ$ 于点 G,则 $PG\perp$ 平面 $ABCD$,故以 G 为坐标原点,以 GB,GP 所在直线分别为 y、z 轴,过点 G 且与 AD 平行的直线为 x 轴,建立如图所示的空间直角坐标系. ……6分



易知 $\angle PQB$ 为二面角 P-AD-C 的平面角,

所以 $\cos\angle PQB=\frac{1}{3}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PQG$ 中, $PQ=\sqrt{3}$,又 $\cos\angle PQG=\frac{1}{3}$,

所以 $QG=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $PG=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,则 $QG=\frac{1}{3}BQ$.

$A\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$, $D\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$, $C\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3},0\right)$,

$P\left(0,0,\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $M\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,

所以 $\overrightarrow{PA}=\left(1,-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\overrightarrow{PD}=\left(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)$, $\overrightarrow{AM}=\left(-\frac{3}{2},\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. ……8分

设平面 PAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x-\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{2\sqrt{6}}{3}z=0,\\ -x-\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{2\sqrt{6}}{3}z=0,\end{cases}$

令 $y=2\sqrt{2}$,则 $x=0$, $z=-1$,故 $\boldsymbol{n}=(0,2\sqrt{2},-1)$ 为平面 PAD 的一个法向量. ……10分

设直线 MA 与平面 PAD 所成的角为 θ,

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{AM}\rangle|=\frac{\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{17}}{2}\times3}=\frac{2\sqrt{102}}{51}$,

即直线 MA 与平面 PAD 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{102}}{51}$.

……12分

20. **解**:(1)由已知, $a=2$,则椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

∵椭圆 C 经过点 $A\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,∴ $\frac{1}{4}+\frac{3}{4b^2}=1$,解得 $b^2=1$.

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……4分

(2)由题意,直线 l 的斜率存在且不为0,设直线 l 的方程为 $x=ty-1(t\neq0)$, $D(x_1,y_1)$, $E(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}x=ty-1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 消去 x,得 $(t^2+4)y^2-2ty-3=0$.

∵ $\Delta=4t^2+12(t^2+4)=16t^2+48>0$,

∴ $y_1+y_2=\frac{2t}{t^2+4}$, $y_1y_2=-\frac{3}{t^2+4}$. ……6分

∵ F 为点 E 关于 x 轴的对称点,∴ $F(x_2,-y_2)$,

∴直线 DF 的方程为 $y-y_1=\frac{y_1+y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$,

即 $y-y_1=\frac{y_1+y_2}{t(y_1-y_2)}(x-x_1)$.

令 $y=0$,则 $x=x_1+\frac{-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}$

$=\frac{(ty_1-1)(y_1+y_2)-ty_1^2+ty_1y_2}{y_1+y_2}$

$=\frac{2ty_1y_2-(y_1+y_2)}{y_1+y_2}=\frac{2ty_1y_2}{y_1+y_2}-1$

$=2t\cdot\left(-\frac{3}{2t}\right)-1=-4$, ……8分

∴ $G(-4,0)$.

∴ $\triangle DEG$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|BG|\cdot|y_1-y_2|$

$=\frac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$=\frac{3}{2}\sqrt{\left(\frac{2t}{t^2+4}\right)^2+\frac{12}{t^2+4}}=\frac{6\sqrt{t^2+3}}{t^2+4}$. ……10分

令 $m=\sqrt{t^2+3}$, $m\in(\sqrt{3},+\infty)$,

则 $S=\frac{6m}{m^2+1}=\frac{6}{m+\frac{1}{m}}$.

$\because m+\frac{1}{m}\in\left(\frac{4\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$，$\therefore S\in\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

$\therefore\triangle DEG$ 的面积 S 的取值范围为 $\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.

…………12 分

21. **解**：(1)由题知对任意的 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{a}{x}+2x+1\geqslant0$ 恒成立，…………1 分

即对任意的 $x\in(0,+\infty)$，$a\geqslant-2x^2-x$ 恒成立. ……2 分

易知函数 $y=-2x^2-x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，

因此 $y=-2x^2-x<0$，$x\in(0,+\infty)$，所以 $a\geqslant0$.

故 a 的取值范围是 $[0,+\infty)$. …………1 分

(2)证明：$F(x)=f(x+1)-3x-2=a\ln(x+1)+x^2$，$x>-1$，

由题知 x_1,x_2 是 $F'(x)=\frac{a}{x+1}+2x=\frac{2x^2+2x+a}{x+1}=0(x>-1)$ 的两个根.

即 x_1,x_2 是方程 $2x^2+2x+a=0(x>-1)$ 的两个根，

则 $\begin{cases}\Delta=1-8a>0,\\2\times(-1)^2+2\times(-1)+a>0,\end{cases}$ 得 $0<a<\frac{1}{2}$，

且 $x_1+x_2=-1$，$x_1x_2=\frac{a}{2}>0$，又 $x_1<x_2$，

则 $-1<x_1<-\frac{1}{2}<x_2<0$. …………6 分

要证 $F(x_2)+\left(\frac{1}{2}-\ln 2\right)x_1>0$，只需证 $F(x_2)>\left(\ln 2-\frac{1}{2}\right)x_1$，

即证 $\frac{F(x_2)}{x_1}<\ln 2-\frac{1}{2}$. …………7 分

$\frac{F(x_2)}{x_1}=\frac{a\ln(x_2+1)+x_2^2}{x_1}=\frac{a\ln(x_2+1)+x_2^2}{-1-x_2}$，

因为 $2x_2^2+2x_2+a=0$，所以 $a=-2x_2^2-2x_2$，

从而 $\frac{F(x_2)}{x_1}=2x_2\ln(x_2+1)-(x_2-1)-\frac{1}{1+x_2}$. ……8 分

令 $t=x_2+1$，则 $t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，$\frac{F(x_2)}{x_1}=2(t-1)\ln t+2-t-\frac{1}{t}$.

设函数 $r(t)=2(t-1)\ln t+2-t-\frac{1}{t}$，$t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，……9 分

则 $r'(t)=2\ln t+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1$，

设函数 $k(t)=2\ln t+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1$，$t\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

则 $k'(t)=\frac{2}{t}-\frac{2}{t^3}+\frac{2}{t^2}=\frac{2(t^2+t-1)}{t^3}$，

易知存在 $t_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $t_0^2+t_0-1=0$，

且当 $t\in\left(\frac{1}{2},t_0\right)$ 时，$k'(t)<0$；当 $t\in(t_0,1)$ 时，$k'(t)>0$，

因此函数 $r'(t)=2\ln t+\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t}+1$ 在 $\left(\frac{1}{2},t_0\right)$ 上单调递减，在 $(t_0,1)$ 上单调递增.

又 $r'\left(\frac{1}{2}\right)=2\ln\frac{1}{2}+4-4+1=1-2\ln 2<0$，

$r'(1)=2\ln 1+1-2+1=0$，

所以当 $\frac{1}{2}<t<1$ 时，$r'(t)<0$，

因此 $r(t)=2(t-1)\ln t+2-t-\frac{1}{t}$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减. …………11 分

从而 $r(t)=2(t-1)\ln t+2-t-\frac{1}{t}<r\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+\ln 2$，

即 $\frac{F(x_2)}{x_1}<\ln 2-\frac{1}{2}$，原命题得证. …………12 分

22. **解**：(1)曲线 C_1 的普通方程为 $\cos\alpha\cdot y-\sin\alpha\cdot x=0$，

即极坐标方程为 $\theta=\alpha(\rho\in\mathbf{R})$. …………3 分

曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-2x=3$，

即 $(x-1)^2+y^2=4$. …………5 分

(2)曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2-2\cos\theta\cdot\rho-3=0$，代入 $\theta=\alpha$，

可得 $\rho_1\cdot\rho_2=-3$，…………8 分

则 $|OA|\cdot|OB|=|\rho_1\rho_2|=3$. …………10 分

23. **解**：(1) $f(x-1)+f(2x-1)=|x-1|+|2x-1|$.

…………1 分

当 $x>1$ 时，$|x-1|+|2x-1|=x-1+2x-1=3x-2\leqslant2x$，则 $x\leqslant2$，所以 $1<x\leqslant2$；

当 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$ 时，$|x-1|+|2x-1|=1-x+2x-1=x\leqslant2x$，则 $x\geqslant0$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1$；

当 $x<\frac{1}{2}$ 时，$|x-1|+|2x-1|=1-x+1-2x=2-3x\leqslant2x$，则 $x\geqslant\frac{2}{5}$，所以 $\frac{2}{5}\leqslant x<\frac{1}{2}$. …………4 分

综上，不等式 $f(x-1)+f(2x-1)\leqslant2x$ 的解集为 $\left\{x\middle|\frac{2}{5}\leqslant x\leqslant2\right\}$. …………5 分

(2)证明：由绝对值不等式的性质可得，

$f(x+a)+f(x-b-c)=|x+a|+|x-b-c|\geqslant|(x+a)-(x-b-c)|=a+b+c$，…………7 分

因为 $a>0,b>0,c>0$，且 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}=1$，所以 $a+b+c=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}+\frac{9}{c}\right)$

$=1+4+9+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{4a}{b}+\frac{4c}{b}+\frac{9a}{c}+\frac{9b}{c}\geqslant14+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{4a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{a}\cdot\frac{9a}{c}}+2\sqrt{\frac{4c}{b}\cdot\frac{9b}{c}}=36$，

当且仅当 $b=2a,c=3a$ 时，等号成立.

故 $f(x+a)+f(x-b-c)\geqslant36$. …………10 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承 ‘’ 专业、专注、有态度 ‘’ 的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。