

2023 届普通高等学校招生全国统一考试  
青桐鸣大联考(高三)答案

数学(理科)

1. B 【解析】 $\because z = \frac{3-4i}{2+i} = \frac{(3-4i)(2-i)}{5} = 2+i,$

$\therefore \bar{z}-i=2-2i, \therefore |\bar{z}-i|=2\sqrt{2}.$  故选 B.

2. C 【解析】由题意得,  $M=(2, -3), N=[-5, 6],$   
 $\therefore M \cap N = (2, 6].$  故选 C.

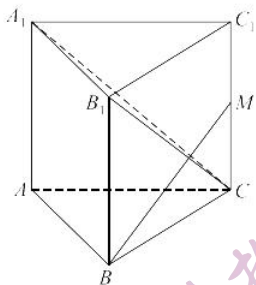
3. B 【解析】由  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$  得,  $|\overrightarrow{AM}|^2 =$   
 $\frac{1}{4}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{5}{4} +$   
 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}.$  故选 B.

4. A 【解析】将点  $A(4, 1)$  代入抛物线方程得  $p=2,$  故  
抛物线方程为  $y^2=4x,$  故准线  $l$  的方程为  $x=-1,$   
故点  $A$  到准线  $l$  的距离为  $4+1=5.$  故选 A.

5. C 【解析】 $S=0, n=1, x=1;$  进入循环,  $S=1, x=$   
 $2, n=2;$  继续循环,  $S=3, x=4, n=3;$  继续循环,  
 $S=7, x=6, n=4,$  输出  $S=7,$  故  $N=3.$  故选 C.

6. C 【解析】由题意得,  $a_{n+1} = a_n - 2^n - 2 \cdot 023,$  又  
 $2^{10} - 2 \cdot 023 < 0, 2^{11} - 2 \cdot 023 > 0,$  故当  $n \leq 10$  时,  
 $a_{n+1} < a_n,$  即  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_{10} > a_{11};$  当  $n \geq 11$   
时,  $a_{n+1} > a_n,$  即  $a_{11} < a_{12} < a_{13} < \dots,$  故当  $a_n$  最小时,  
 $n=11.$  故选 C.

7. A 【解析】连接  $B_1C,$  如图,



由题意知,  $A_1B_1 \perp$  平面  $BB_1C_1C, \therefore BM \subset$  平面  
 $BB_1C_1C, \therefore A_1B_1 \perp BM,$  且  $A_1C_1 \perp BM, A_1B_1 \cap$   
 $A_1C_1 = A_1, \therefore BM \perp$  平面  $A_1B_1C, \therefore B_1C \subset$  平面  
 $A_1B_1C, \therefore BM \perp B_1C.$

$\therefore \triangle BCM \sim \triangle B_1BC, \therefore \frac{CM}{BC} = \frac{BC}{BB_1}, \therefore BB_1 = 2\sqrt{2}.$

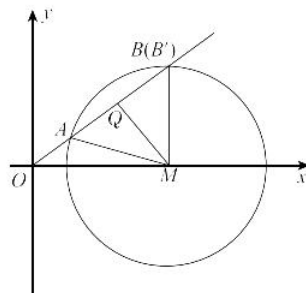
$\therefore$  该三棱柱的体积  $V = S_{\triangle ABC} \cdot BB_1 = 4\sqrt{2}.$   
故选 A.

8. D 【解析】由题意得  $a_n^2 = \left(\frac{1}{3} \cdot 4^n - \lambda\right) -$   
 $\left(\frac{1}{3} \cdot 4^{n-1} - \lambda\right) = 4^{n-1} (n \geq 2), \therefore a_n = 2^{n-1} (n \geq 2),$   
又  $\{a_n\}$  为等比数列,  $\therefore a_1 = 1, \therefore a_1^2 = \frac{4}{3} - \lambda = 1,$   
 $\therefore \lambda = \frac{1}{3}.$  故选 D.

9. A 【解析】原九位数所有偶数不相邻, 故符合条件的  
交换可以是两个偶数交换, 种数为  $C_4^2;$  两个奇数  
交换, 种数为  $C_5^2;$  1,2 交换或 8,9 交换, 种数为 2. 故  
所求概率为  $\frac{C_4^2 + C_5^2 + 2}{C_9^2} = \frac{1}{2}.$  故选 A.

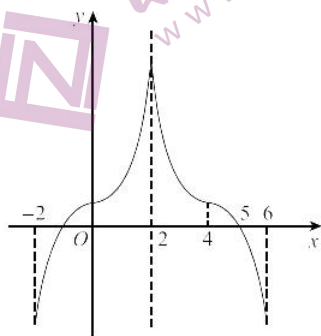
10. D 【解析】 $\because \frac{b}{a} = \log_{2 \cdot 023} 2 \cdot 024 \times \log_{2 \cdot 023} 2 \cdot 022 <$   
 $\left(\frac{\log_{2 \cdot 023} 2 \cdot 024 + \log_{2 \cdot 023} 2 \cdot 022}{2}\right)^2 =$   
 $\left[\frac{\log_{2 \cdot 023} (2 \cdot 023^2 - 1)}{2}\right]^2 < 1, \therefore$  ① 正确;  
 $\because a > 1, b > 1, \therefore a + b > 2, \therefore$  ② 正确;  
 $\because a(2-b) = 2a - ab = 2 \log_{2 \cdot 023} 2 \cdot 023 - \log_{2 \cdot 023} 2 \cdot 023 \times$   
 $\log_{2 \cdot 023} 2 \cdot 024 = \log_{2 \cdot 023} 2 \cdot 023 - \log_{2 \cdot 023} 2 \cdot 024 =$   
 $\log_{2 \cdot 023} \frac{2 \cdot 022 \times 2 \cdot 024 + 1}{2 \cdot 024} = \log_{2 \cdot 023} \left(2 \cdot 022 + \frac{1}{2 \cdot 024}\right) >$   
 $1, \therefore$  ③ 正确. 故选 D.

11. B 【解析】如图, 过点  $M$  作  $x$  轴的垂线交  $y = \frac{b}{a}x$   
于点  $B',$



则  $\frac{|MB'|}{|OM|} = \frac{b}{a}$ , 故  $|MB'| = b$ , 故点  $B'$  与点  $B$  重合, 即  $\angle OMB = 90^\circ$ , 故  $|OB| = c$ , 又  $\overrightarrow{OB} = 3\overrightarrow{OA}$ , 则  $|AB| = \frac{2c}{3}$ . 取  $Q$  为  $AB$  的中点, 则  $|MQ|^2 = |BM|^2 - |BQ|^2 = b^2 - \frac{c^2}{9}$ . 故在  $\triangle OMQ$  中,  $|MQ|^2 + |OQ|^2 = |OM|^2$ , 即  $b^2 - \frac{c^2}{9} + \left(\frac{2c}{3}\right)^2 = a^2$ , 解得  $c = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . 故选 B.

12. D 【解析】由  $f(x) - 1$  为奇函数得  $f(-x) - 1 = -[f(x) - 1]$ , 即  $f(-x) - 2 = -f(x)$ ,  $\therefore f(x) - 2$  为偶函数,  $\therefore f(-x - 2) = f(x + 2)$ , 即  $f(x - 2) = f(x + 4)$ ,  $\therefore f(x + 4) - 2 = -f(x)$ , 则  $f(x + 8) - 2 = -[2 - f(x)] = f(x)$ ,  $\therefore f(x)$  的周期为 8, 如图为  $f(x)$  在  $[-2, 6]$  上的图象,



$a = f(11) = f(3)$ ,  $3 < \log_2 11 < 4$ ,  $\therefore f(3) > f(\log_2 11)$ , 即  $a > b$ ,  $c = f(2^{11}) = f(0) = f(4) < b < a$ . 故选 D.

13.  $-\frac{1}{3}$  【解析】由题意得,  $P_1 - P_2 = P_3 - 1$  ①,  $P_1 + 2P_2 + 3P_3 = \frac{5}{3}$  ②, ② - ①  $\times 2$  得,  $P_3 - P_1 = -\frac{1}{3}$ .

14.  $\frac{\pi}{6}$  【解析】由  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , 得  $\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$ , 则  $f\left(\frac{T}{2}\right) = \cos(\pi + \varphi) = -\cos \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\therefore |\varphi|$  的最小值为  $\frac{\pi}{6}$ .

15.  $\frac{16\pi}{3}$  【解析】由  $\angle BDC = 90^\circ$  可知, 球心  $O$  在平面  $BCD$  的射影在  $BC$  的中点处, 又平面  $ABC \perp$  平面

$BCD$ , 可知  $O$  为  $\triangle ABC$  的外接圆的圆心, 故求得球  $O$  的半径为  $R = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ,  $\therefore$  球  $O$  的表面积为  $S_{球} =$

$$4\pi R^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

16.  $\frac{2}{\ln 2}$  【解析】令  $f(x) = e^x + e^{-x} - ax^2 \ln x - x^2 = 0$ , 则  $\frac{e^x}{x^2} + x - a \ln x = 1 = 0$ , 即  $e^{-x} \ln x + (x - a \ln x) - 1 = 0$ . 令  $x - a \ln x = t$ , 则  $g(t) = e^t + t - 1 = 0$ ,  $g'(t) = e^t + 1 > 0$ , 得  $g(t)$  为增函数, 故  $g(t) = 0$  有唯一解, 即  $t = 0$ , 即  $x - a \ln x = 0$  的两个解为  $x_1, x_2$ , 故  $x_1 - a \ln x_1 = 0, 2x_1 - a \ln(2x_1) = 0$ , 故  $x_2 - a \ln x_2 = 2x_1 - a(\ln x_2 + \ln 2)$ .

两式相除得  $\frac{1}{2} = \frac{\ln x_1}{\ln x_2 + \ln 2}$ , 解得  $x_2 = 2$ .

$$\text{故 } a = \frac{x}{\ln x_1} = \frac{2}{\ln 2}.$$

17. 解: (1) 由条件得,  $(\sin B + \cos C)^2 +$

$$(\cos B + \sin C)^2 = \frac{8 + 4\sqrt{3}}{16} + \frac{24 + 12\sqrt{3}}{16},$$

$$\text{即 } 2 + 2\sin(B + C) = 2 + \sqrt{3},$$

$$\text{则 } \sin(B + C) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{即 } \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\therefore A \text{ 为锐角, } \therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

(2) 由  $\sin B = \cos C = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ , 得  $\sin B +$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4},$$

$$\text{即 } \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \sin B - \frac{1}{2} \cos B = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ ①.}$$

$$\text{由 } \cos B = \sin C = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{得 } \cos B \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3} - B\right) = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4},$$

$$\text{即 } \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \cos B + \frac{1}{2} \sin B = \frac{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}}{4} \text{ ②.}$$

$$\text{①} \times (2 + \sqrt{3}) + \text{②} \text{ 得,}$$

$$2(2+\sqrt{3})\sin B - \sqrt{2}(2+\sqrt{3}),$$

$$\therefore \sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

又  $B$  为锐角,  $\therefore B = \frac{\pi}{4}$ ,

$$\text{则 } C = \frac{5\pi}{12}, \therefore \sin C = \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4},$$

$$a = \sqrt{3}, \text{ 则由正弦定理得 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2,$$

$$a + b + c = \sqrt{3} + 2\sin B + 2\sin C = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\therefore \text{ 三角形 } ABC \text{ 的周长为 } \sqrt{3} + \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

18. 解: (1) 运动俱乐部修建前职工每天运动的平均时间

$$\text{为 } \bar{x} = \frac{1}{200}(36 \times 10 + 58 \times 30 + 81 \times 50 + 25 \times 70) =$$

39.5(分钟);

运动俱乐部修建后职工每天运动的平均时间为

$$\bar{y} = \frac{1}{200}(18 \times 10 + 63 \times 30 + 83 \times 50 + 36 \times 70) =$$

43.7(分钟).

(2) 方案 1: 两个  $M$  品牌用电器都正常工作 12 个月, 设备正常运行时间为 12 个月, 概率为 0.25; 设备正常运行时间为 11 个月, 概率为 0.75.

则其设备性价比的分布列为

性价比	$\frac{12}{2000}$	$\frac{11}{2000}$
$P$	0.25	0.75

$$\text{性价比的数学期望为 } \frac{12}{2000} \times 0.25 + \frac{11}{2000} \times$$

$$0.75 = \frac{9}{1600}.$$

方案 2: 1 个  $M$  品牌和 2 个  $N$  品牌用电器能使设备正常运行时间为 10 个月的概率为  $0.5^2 = 0.25$ ; 使设备正常运行时间为 11 个月的概率为  $C_2^1 \times 0.5^2 + 0.5 = 0.625$ ; 使设备正常运行时间为 12 个月的概率为  $0.5 = 0.125$ .

则其设备性价比的分布列为

性价比	$\frac{10}{1800}$	$\frac{11}{1800}$	$\frac{12}{1800}$
$P$	0.25	0.625	0.125

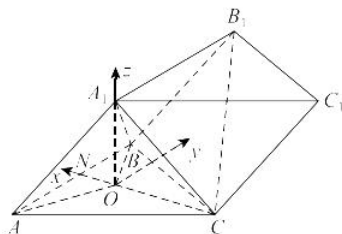
$$\text{性价比的数学期望为 } \frac{10}{1800} \times 0.25 + \frac{11}{1800} \times$$

$$0.625 + \frac{12}{1800} \times 0.125 = \frac{10.875}{1800}.$$

$$\text{因为 } \frac{9}{1600} < \frac{81}{14400} < \frac{87}{14400} = \frac{10.875}{1800},$$

所以从性价比的期望角度考虑, 选择方案 2 更实惠.

19. 解: (1) 证明: 设等边三角形  $ABC$  的中心为  $O$ , 连接  $OA_1, OA, OB, OC$ , 如图.



则  $A_1O \perp$  平面  $ABC$ ,

又  $OA = OB = OC$ ,

$$\text{可得 } AA_1 = A_1B = A_1C = \sqrt{2},$$

又  $AB = BC = AC = 2$ ,

$$\text{可得 } A_1B^2 = AA_1^2 + AB^2,$$

则  $AA_1 \perp AB$ , 同理  $AA_1 \perp A_1C$ .

又  $A_1B, A_1C \subset$  平面  $A_1BC, A_1B \cap A_1C = A_1$ ,

故  $AA_1 \perp$  平面  $A_1BC$ .

又  $AA_1 \parallel BB_1$ ,

故  $BB_1 \perp$  平面  $A_1BC$ .

(2) 取  $AB$  的中点  $N$ , 则  $N, O, C$  三点共线, 以  $O$  为原点, 以  $\vec{ON}, \vec{AB}, \vec{OA_1}$  所在方向分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴的正方向, 建立空间直角坐标系  $O-xyz$ ,

$$\text{则 } A\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -1, 0\right), B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, 0\right), C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, 0\right),$$

$$A_1\left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \vec{A_1B_1} = (0, 2, 0), \vec{A_1C} =$$

$$\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

由(1)知,平面  $A_1BC$  的一个法向量为  $\overrightarrow{AA_1} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ .

设平面  $A_1B_1C$  的法向量为  $m = (x, y, z)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} m \cdot \overrightarrow{A_1B_1} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{A_1C} = 0. \end{cases}$$

$$\text{则} \begin{cases} 2y = 0, \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}x - \frac{\sqrt{6}}{3}z = 0. \end{cases}$$

令  $x=1$ , 则  $m = (1, 0, -\sqrt{2})$ .

$$\text{故} \quad |\cos \langle \overrightarrow{AA_1}, m \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AA_1} \cdot m|}{|\overrightarrow{AA_1}| |m|}$$

$$= \frac{\left| -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \right|}{\sqrt{2} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{故} \quad \sin \langle \overrightarrow{AA_1}, m \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

即二面角  $B_1-A_1C-B$  的正弦值为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

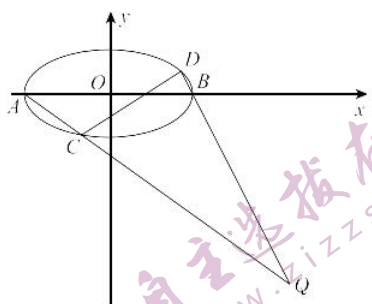
20. 解:(1) 设  $M(x, y)$ , 则由  $k_{MV} \cdot k_{VM} = -\frac{1}{4}$  得,

$$\frac{y}{x+2} \cdot \frac{y}{x-2} = -\frac{1}{4},$$

$$\text{整理得} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

$\therefore$  椭圆  $R$  的标准方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ .

(2) 如图,



设  $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2), Q(x_0, y_0)$ ,

$$\text{则相关直线的斜率满足} \begin{cases} k_{QC} = k_{CQ}, \\ k_{QD} = k_{DQ}. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{y_1}{x_1+2} = \frac{y_1}{x_1+2}, \\ \frac{y_2}{x_2-2} = \frac{y_2}{x_2-2}. \end{cases}$$

$$\text{两式相除得} \frac{x_1+2}{x_1-2} = \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{x_2-2}{x_1-2},$$

$$\text{由(1)知} \frac{y_1}{x_2-2} \cdot \frac{y_2}{x_1+2} = \frac{1}{4},$$

$$\text{即} \frac{y_2}{x_2-2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{x_2+2}{y_2},$$

$$\therefore \frac{x_1+2}{x_1-2} = \frac{y_2}{x_2-2} \cdot \frac{x_1-2}{y_2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(x_2+2)(x_1+2)}{y_1 y_2}.$$

若  $CD$  与  $x$  轴垂直, 则直线  $CD$  的方程为  $x=1$ ,

$$\text{易得} y_1 y_2 = -\frac{3}{4},$$

$$\text{则} \frac{x_1+2}{x_1-2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{(x_2+2)(x_1+2)}{y_1 y_2} = -\frac{1}{4} \times$$

$$\frac{9}{-\frac{3}{4}} = 3,$$

解得  $x_0=1$ ;

若  $CD$  不与  $x$  轴垂直, 设直线  $CD$  的方程为  $y = k(x-1)$ , 代入椭圆方程化简得,  $(1+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0$ ,

$$\Delta > 0 \text{ 成立, 则 } x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1+4k^2}, x_1 x_2 = \frac{4k^2-4}{1+4k^2}.$$

$$\therefore \frac{(x_1+2)(x_2+2)}{y_1 y_2} = \frac{(x_1+2)(x_2+2)(k^2 - x_1 x_2) + 1}{k^2 - x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} =$$

$$\frac{\frac{4k^2-4}{1+4k^2} + 2 \cdot \frac{8k^2}{1+4k^2} - 4}{k^2 \left( \frac{4k^2-4}{1+4k^2} - \frac{8k^2}{1+4k^2} + 1 \right)} =$$

$$\frac{\frac{4k^2-4-16k^2-4-16k^2}{1+4k^2} - \frac{36k^2}{1+4k^2}}{k^2 \left( \frac{4k^2-4-8k^2-4-16k^2}{1+4k^2} \right)} = \frac{-12}{-3k^2} = 12.$$

$$\therefore \frac{x_0+2}{x_0-2} = \frac{1}{4} \times (-12) = 3,$$

解得  $x_0=1$ .

综上所述, 点  $Q$  的横坐标为 1.

21. 解:(1) 由  $f(x) = \frac{x^2}{3} + x - m \ln x$ ,

$$\text{得} f'(x) = x + 1 - m(1 + \ln x),$$

$$\text{设} g(x) = x^2 + 1 - m(1 + \ln x),$$



则  $g'(x) = 2x - \frac{m}{x}$ .

令  $g'(x) = 0$ , 得  $x = \sqrt{\frac{m}{2}}$ .

当  $x \in (0, \sqrt{\frac{m}{2}})$  时,  $g(x)$  单调递减; 当  $x \in (\sqrt{\frac{m}{2}}, +\infty)$  时,  $g(x)$  单调递增,

则  $g(x)_{\min} = f'(x)_{\min} = f'(\sqrt{\frac{m}{2}})$ .

则要使函数  $f(x)$  为增函数, 只需  $f'(\sqrt{\frac{m}{2}}) = \frac{m}{2} + 1 - m(1 + \ln \sqrt{\frac{m}{2}}) \geq 0$ .

即  $1 - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} \ln \frac{m}{2} \geq 0$ .

易知函数  $y = 1 - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} \ln \frac{m}{2}$  在  $m \in (0, +\infty)$  上单调递减, 且当  $m = 2$  时,  $\frac{m}{2} - \frac{m}{2} \ln \frac{m}{2} = 0$ .

故当  $0 < m \leq 2$  时,  $1 - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} \ln \frac{m}{2} \geq 0$  成立; 当

$m > 2$  时,  $1 - \frac{m}{2} - \frac{m}{2} \ln \frac{m}{2} < 0$ .

故  $m \in (0, 2]$ .

(2) 证明: 当  $m = 2$  时,  $f(x) = \frac{x^3}{3} - x - 2x \ln x$ .

则  $f(x_1) + f(x_2) - \frac{8}{3} = 2f(1)$ .

由(1)知,  $f(x)$  为增函数, 故  $0 < x_1 < 1 < x_2$ .

要证  $x_1 + x_2 > 2$ , 只需证  $x_2 > 2 - x_1$ , 即证  $f(x_2) > f(2 - x_1)$ , 即证  $f(x_1) + f(2 - x_1) - \frac{8}{3} < 0$ .

令  $h(x) = f(x) + f(2 - x) - \frac{8}{3}$ .

则  $h'(x) = f'(x) - f'(2 - x) = x^2 - 2 \ln x - 1 - [(2 - x)^2 - 2 \ln(2 - x) - 1] - x^2 + 2 \ln x - (2 - x)^2 + 2 \ln(2 - x)$ .

令  $p(x) = h'(x)$ ,

则  $p'(x) = 2x - \frac{2}{x} - 2(2 - x) - \frac{2}{2 - x} = 1 - \frac{1}{x(2 - x)}$ .

当  $0 < x < 1$  时,  $x(2 - x) < (\frac{x+2-x}{2})^2 = 1$ , 则

$p'(x) = 1 - \frac{1}{x(2-x)} < 0$ .

则  $h'(x)$  在  $(0, 1)$  上为减函数,  $h'(x) > h'(1) = 0$ .

故  $h(x)$  在  $(0, 1)$  上为增函数,  $h(x) < h(1) = 0$ .

而  $0 < x_1 < 1$ .

故  $h(x_1) = f(x_1) + f(2 - x_1) - \frac{8}{3} < 0$ .

即  $x_1 + x_2 > 2$ .

22. 解: (1) 由  $\begin{cases} x = \frac{t+1}{t-1}, \\ y = \frac{2\sqrt{t}}{t-1} \end{cases}$  ( $t$  为参数) 得,

$x^2 - y^2 = \left(\frac{t+1}{t-1}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{t}}{t-1}\right)^2 = \frac{(t+1)^2 - 4t}{(t-1)^2} = \frac{(t-1)^2}{(t-1)^2} = 1$ .

又  $xy = \frac{2\sqrt{t}(t+1)}{(t-1)^2} \geq 0$ , 而  $x = \frac{t+1}{t-1} = 1 + \frac{2}{t-1} \neq 1$ .

故曲线  $C$  的普通方程为  $x^2 - y^2 = 1 (xy \geq 0, \text{且 } x \neq 1)$ .

(注: 只写出方程没写出  $x, y$  的取值范围的扣 1 分, 取值范围按以下方式写也对.

又  $t \geq 0$  且  $t \neq 1$ , 则当  $t \in [0, 1)$  时,  $x = \frac{t+1}{t-1} \leq -1$ ,

$y = \frac{2\sqrt{t}}{t-1} \leq 0$ .

当  $t \in (1, +\infty)$  时,  $x = \frac{t+1}{t-1} > 1, y = \frac{2\sqrt{t}}{t-1} > 0$ )

由  $\rho \cos(\theta - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$  得,

$\rho(\frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta) = -\frac{1}{2}$ .

代入  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  得  $\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = -\frac{1}{2}$ .

即直线  $l$  的直角坐标方程为  $x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ .

(2) 将  $\begin{cases} x = \frac{t-1}{t-1}, \\ y = \frac{2\sqrt{t}}{t-1} \end{cases}$  代入  $x + \sqrt{3}y + 1 = 0$  得,

$$\frac{t+1}{t-1} + \sqrt{3} \cdot \frac{2\sqrt{t}}{t-1} - 1 = 0,$$

整理得  $t + \sqrt{3t} = 0$ , 即  $\sqrt{t}(\sqrt{t} + \sqrt{3}) = 0$ ,

而  $\sqrt{t} + \sqrt{3} > 0$ ,

故  $\sqrt{t} = 0$ , 即  $t = 0$ ,

$$\text{则 } \begin{cases} x = -1, \\ y = 0. \end{cases}$$

则直线  $l$  与曲线  $C$  的交点的直角坐标为  $(-1, 0)$ .

23. 证明: (1)  $6abc = a^2 + 2b^2 + 3c^2 \geq 3 \sqrt{a^2 \cdot 2b^2 \cdot 3c^2} = 3 \sqrt{6(abc)^2}$ ,

当且仅当  $a = \sqrt{2}b = \sqrt{3}c = \frac{\sqrt{6}}{2}$  时等号成立, 即

$$2abc \geq \sqrt{6(abc)^2},$$

则  $8(abc)^2 \geq 6(abc)^2$ ,

故  $abc \geq \frac{3}{4}$ , 当且仅当  $a = \sqrt{2}b = \sqrt{3}c = \frac{\sqrt{6}}{2}$  时等号成

立.

(2) 易知  $a^2 + b^2 \geq 2ab, a^2 + c^2 \geq 2ac, b^2 + c^2 \geq 2bc$ ,

$$\text{故 } \frac{3c}{a^2 + b^2} + \frac{2b}{a^2 + c^2} + \frac{a}{b^2 + c^2} \leq \frac{3c}{2ab} + \frac{2b}{2ac} + \frac{a}{2bc} = \frac{3c^2 + 2b^2 + a^2}{2abc} \leq 3.$$

当且仅当  $a = b = c = 1$  时等号成立.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线