# 2017 年北京大学自主招生数学试题

## 总体评价

1. 保持了近年北大自招试题的风格.
   (a) 20 道单选题，选对得 5 分，选错扣 1 分，不选得 0 分.
   (b) 时间紧张. 三个小时内要完成语数外三科试题的解答，很少有学生能做完.
   (c) D 选项一律是“前三个答案都不对”，很有迷惑性，有时候甚至比较棘手. 例如第 5 题，答案数字不怎么整，考场上时间紧张的情况下，是否相信自己的判断选 D，对考生来说是个考验；再比如第 9 题，答案明显是个负整数，但由于 D 选项的存在，在只有 A 选项为负整数的情况下仍然需要进行估算.
   (d) 风格灵巧，强调多想少算. 比如第 1 题，看出来配方的技巧就可以秒掉，如果硬算的话，考场上可能就悲剧了.
   (e) 不追求知识点的全面覆盖. 数论、函数、平面几何、三角等一向是北大各种自招相关的考试中的高频考点，在 2017 年的自主招生考试中也依然是考察重点. 而概率、统计、导数、立体几何等考点一向被北大冷落，这场考试也不例外.
   (f) 经典试题有一定的重现率. 比如第 6 题就是平面几何中的经典问题，第 9 题中用到的对数运算公式在自招考试中也是屡见不鲜.
2. 相对于近年北大的各场自招相关的考试来说，这份试卷的难度不高，在平均线以下.
3. 有较好的区分度，可以达到北大自主选拔的目的.

## 与高考题的对比

1. 有些试题即使放到高考中也不是难题，比如第 19 题、第 20 题. 这类题基本每份自招试卷中都有，但一般来讲数量较少.
2. 有些试题的考点同时也是高考的重要考点，但是综合性较强，考生要想短时间内顺利解决的话，得有很好的基本功. 比如第 18 题，如果做成四次函数求最值就麻烦了，代数变形之后换元，处理成二次函数才是正道. 再比如第 14 题，每一步可能都不难，用到的知识也都是高考要求的，但是步骤一多，考生可能就会卡壳.
3. 还有一多半的试题，或者考点不是高考重点要求的，比如数论，恐怕是自主招生中考察最多的知识点，但高考却很少涉及；或者考点也许在高考范围内，但考法较为灵活，比如第 12 题，需要将多个变量之间的本质关系想清楚才能顺利解决.

## 对考生的建议

1. 一定要有针对性的训练．比如高考很少考到数论相关的问题，即使考到，最多也就用到奇偶性、简单的整除之类常识性的知识，但是自主招生对于数论的要求却较高．事实上，数论相关的问题很容易体现出“多想少算”的特点，非常符合自招的选拔需求．再比如说平面几何，高中生很可能还比不上初中生，毕竟高考中的平面几何问题都非常简单．如果平时没有针对性的训练，考场上遇到不熟悉的考点很容易抓瞎；遇到那种考点在高考范围内，但风格不太一样的试题，也很难顺利解决．

2. 往年的自招真题，还有全国联赛的一试题、预赛题，都是很好的准备材料．平时多练习多思考多总结，考场上遇到原题或者改编题的可能性相当大，那就赚到了．

3. 试题难度总体上会保持稳定．今年北大自主招生数学试题相对容易，只是正常波动，明年很可能比今年稍难．对此大家要有心理准备．

4. 选择题的“考场技巧”平时要多练，毕竟北大这两年的自招、博雅全是选择题．必要的时候可以猜．事实上，一道题即使完全不会，也不能空着．有同学可能会问，选错不是倒扣 1 分吗？可是我们算算期望，一道题随机选择的得分期望是 0.5 分呀！如果能排除两个错误选项呢？期望只会更高．

## 试题及答案

1. 已知实数 $a,b$ 满足 $\left(a^2+4\right)\left(b^2+1\right)=5(2ab-1)$，则 $b\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$ 的值为（　　）

A. 1.5　　B. 2.5

C. 3.5　　D. 前三个答案都不对

解析　C．

2. 函数 $f(x)=\left|x^2-2\right|-\dfrac{1}{2}|x|+|x-1|$，$x\in[-1,2]$ 上的最大值与最小值的差所在的区间是（　　）

A. $(2,3)$　　B. $(3,4)$

C. $(4,5)$　　D. 前三个答案都不对

解析　B．

3. 不等式组 $\begin{cases} y\geqslant 2|x|-1, \\ y\leqslant -3|x|+5 \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为（　　）

A. 6　　B. $\dfrac{33}{5}$

C. $\dfrac{36}{5}$　　D. 前三个答案都不对

解析　C．

4. $\left(1+\cos\dfrac{\pi}{5}\right)\left(1+\cos\dfrac{3\pi}{5}\right)$ 的值为（　　）

A. $1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　　B. $1+\dfrac{1}{4}$

C. $1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　　D. 前三个答案都不对

解析　B．

5. 在圆周上逆时针摆放了 4 个点 $A,B,C,D$，已知 $BA=1$，$BC=2$，$BD=3$，$\angle ABD=\angle DBC$，则该圆的直径为（　　）

A. $2\sqrt{5}$　　B. $2\sqrt{6}$

C. $2\sqrt{7}$　　D. 前三个答案都不对

解析　D.

6. 已知三角形三条中线长度分别为 $9,12,15$，则该三角形面积为（　　）

A. 64　　B. 72

C. 90　　D. 前三个答案都不对

解析　B.

7. 已知 $x$ 为实数，使得 $2,x,x^2$ 互不相同，且其中有一个数恰为另一个数的 2 倍，则这样的实数 $x$ 的个数为（　　）

A. 3　　B. 4

C. 5　　D. 前三个答案都不对

解析　B.

8. 设整数 $a,m,n$ 满足 $\sqrt{a^2-4\sqrt{5}}=\sqrt{m}-\sqrt{n}$，则这样的整数组 $(a,m,n)$ 的个数为（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 前三个答案都不对

解析　C.

9. 设

$$S=\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\pi}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\pi}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\pi}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{7}}\pi},$$

则不超过 $S$ 且与 $S$ 最接近的整数为（　　）

A. $-5$　　B. 4

C. 5　　D. 前三个答案都不对

解析　A.

10. 已知复数 $z$ 满足 $z+\dfrac{2}{z}$ 是实数，则 $|z+\mathrm{i}|$ 的最小值等于（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. 1　　D. 前三个答案都不对

解析　D.

11. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 1，$P_1,P_2,P_3,P_4$ 是正方形内部的 4 个点使得 $\triangle ABP_1$，$\triangle BCP_2$，$\triangle CDP_3$ 和 $\triangle DAP_4$ 都是正三角形，则四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积等于（　　）

A. $2-\sqrt{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

C. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{8}$　　D. 前三个答案都不对

解析　A.

12. 已知某个三角形的两条高的长度分别为 10 和 20，则它的第三条高的长度的取值区间为（　　）

A. $\left(\frac{10}{3},5\right)$　　B. $\left(5,\frac{20}{3}\right)$

C. $\left(\frac{20}{3},20\right)$　　D. 前三个答案都不对

解析　C.

13. 正方形 $ABCD$ 与点 $P$ 在同一平面内，已知该正方形的边长为 1，且 $|PA|^2+|PB|^2=|PC|^2$，则 $|PD|$ 的最大值为（　　）

A. $2+\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$

C. $1+\sqrt{2}$　　D. 前三个答案都不对

解析　A.

14. 方程 $\log_4(2^x+3^x)=\log_3(4^x-2^x)$ 的实根个数为（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 前三个答案都不对

解析　B.

15. 使得 $x+\frac{2}{x}$ 和 $x^2+\frac{2}{x^2}$ 都是整数的正实数 $x$ 的个数为（　　）

A. 1　　B. 2

C. 无穷多　　D. 前三个答案都不对

解析　A.

16. 满足 $f(f(x))=f^4(x)$ 的实系数多项式 $f(x)$ 的个数为（　　）

A. 2　　B. 4

C. 无穷多　　D. 前三个答案都不对

解析　D.

17. 使得 $p^3+7p^2$ 为平方数的不大于 100 的素数 $p$ 的个数为（　　）

A. 0　　B. 1

C. 2　　D. 前三个答案都不对

解析　C.

18. 函数 $f(x)=x(x+1)(x+2)(x+3)$ 的最小值为（　　）

A. $-1$　　B. $-1.5$

C. $-2$　　D. 前三个答案都不对

解析　A.

19. 动圆与两圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2-6x+7=0$ 都外切，则动圆的圆心轨迹是（　　）

A. 双曲线　　B. 双曲线的一支

C. 抛物线　　D. 前三个答案都不对

解析　B.

20. 在 $\triangle ABC$ 中，$\sin A=\frac{4}{5}$，$\cos B=\frac{4}{13}$，则该三角形是（　　）

A. 锐角三角形　　B. 钝角三角形

C. 无法确定　　D. 前三个答案都不对

解析　A.