2023年普通高等学校招生全国统一考试模拟试题

数学试题参考答案及评分标准

2023.5

一、单项选择题：本大题共8小题，每小题5分，共40分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1－5 CACBA 6－8 DCD

二、多项选择题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求.全部选对得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9.AC 10.ACD 11.ABD 12.CD

三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13.33 14.$x^2+y^2=16$ 15.$(1,e^{\frac{1}{e}})$ 16.$(0,\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},2\sqrt{2})$

四、解答题：本大题共6小题，第17题10分，第18、19、20、21、22题为12分，共70分.

17.解：(1)因为 $a_{n+1}=a_n+2b_n$，$b_{n+1}=2a_n+b_n$，

所以 $a_{n+1}+b_{n+1}=3(a_n+b_n)$，$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$，………………………… 2分

又由 $a_1=3$，$b_1=2$ 得 $a_1-b_1=1$，$a_1+b_1=5$，………………………… 3分

所以数列 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为5，公比为3的等比数列，数列 $\{a_n-b_n\}$ 是首项为1，公比为－1的等比数列. ………………………… 5分

(2)由(1)得

$a_n+b_n=5\times3^{n-1}$，$a_n-b_n=(-1)^{n-1}$，

$a_n=\dfrac{5\times3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}$，$b_n=\dfrac{5\times3^{n-1}-(-1)^{n-1}}{2}$，………………………… 7分

$a_nb_n=\dfrac{5\times3^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}\times\dfrac{5\times3^{n-1}-(-1)^{n-1}}{2}=\dfrac{25\times3^{2n-2}-1}{4}$，………………………… 8分

$S_n=\dfrac{25}{4}\times\dfrac{1-9^n}{1-9}-\dfrac{n}{4}=\dfrac{25\times(9^n-1)-8n}{32}$. ………………………… 10分

18.解：(1)由题意可得，在△ABD中，$\angle ADB$的平分线为DE，且$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$，

则$AD=2BD$，由余弦定理得，$AB^2=AD^2+BD^2-2AD\cdot BD\cos\angle ADB$，

即 $3=4BD^2+BD^2-2\times2BD\times BD\times\dfrac{1}{2}$，

解得：$BD=1$，$AD=2$，………………………… 4分

则 $AD^2=AB^2+BD^2$，△ABD为直角三角形

则 $S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ………………………… 6分

(2)在平面凸四边形$ABCD$中，$\angle ADB=60°$，则 $0°<\angle BDC<120°$，

由(1)可得，$\angle ABD=90^\circ$，$\angle CBD=15^\circ$，

在$\triangle BCD$中，$\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BD}{\sin C}$，

则$CD=\frac{BD}{\sin C}\sin\angle CBD=\frac{\sin15^\circ}{\sin C}=\frac{\sin15^\circ}{\sin(165^\circ-\angle CDB)}$， ………………………… 9分

又$45^\circ<165^\circ-\angle CDB<165^\circ$，$\sin15^\circ=\sin(45^\circ-30^\circ)=\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}$，

所以$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}<\sin(165^\circ-\angle CDB)\leqslant1$，

所以$\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4}\leqslant\frac{\sin15^\circ}{\sin(165^\circ-\angle CDB)}<1$，

所以CD的取值范围是$[\frac{\sqrt6-\sqrt2}{4},1)$. ………………………… 12分

19. 解：(1)由$y=a\cdot x^b$得，$\ln y=\ln(a\cdot x^b)=\ln a+b\ln x$， ………………………… 1分

令$u=\ln x$，$v=\ln y$，$c=\ln a$，则$v=c+bu$，

由表中数据可得，$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(u_i-\bar{u})(v_i-\bar{v})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(u_i-\bar{u})^2}=\frac{0.41}{1.64}=0.25$， ………………………… 3分

则$\hat{c}=\bar{v}-\hat{b}\bar{u}=\frac{24.87}{5}-0.25\times\frac{16.30}{5}=4.159$，

所以$\hat{v}=4.159+0.25u$， ………………………… 5分

即$\ln\hat{y}=4.159+0.25\ln x=\ln(e^{4.159}\cdot x^{\frac14})$，

因为$e^{4.159}=64$，所以$\hat{y}=64x^{\frac14}$，

故所求的回归方程为$y=64x^{\frac14}$. ………………………… 6分

(2)设每件产品的销售利润为X元，则X的所有可能取值为1.5，3.5，5.5，

由直方图可得，A,B,C三类产品的频率分别为0.15，0.45，0.4，

所以$P(X=1.5)=(0.004+0.011)\times10=0.15$，$P(X=3.5)=(0.020+0.025)\times10$
$=0.45$，$P(X=5.5)=(0.023+0.017)\times10=0.4$，

所以随机变量X的分布列为：

X	1.5	3.5	5.5
P	0.15	0.45	0.4

所以$EX=1.5\times0.15+3.5\times0.45+5.5\times0.4=4$，

故每件产品的平均销售利润为4元； ………………………… 9分

设年收益为z万元，则$z=(EX)\cdot y-x=256x^{\frac14}-x$，

设$t=x^{\frac14}$，$f(t)=256t-t^4$，

则$f'(t)=256-4t^3=4(64-t^3)$，

当 $t\in(0,4)$ 时 $f'(t)>0$，$f(t)$ 在 $(0,4)$ 单调递增，

当 $t\in(4,+\infty)$ 时 $f'(t)<0$，$f(t)$ 在 $(4,+\infty)$ 单调递减，

所以，当 $t=4$，即 $x=256$ 时，z 有最大值为 768，

所以估计当该公司一年投入 256 万元营销费时，能使得该产品年收益达到最大. ……………………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)证明：如图，设 AC 交 BD 于点 F，连接 EF，易知 $PO\perp$ 底面 ABD，所以 $PO\perp AC$，又 $\triangle ABD$ 是底面圆的内接正三角形，由 $AD=\sqrt{3}$，可得 $AF=\dfrac{3}{2}$，$AC=2$. 又 $AE=\sqrt{3}$，$CE=1$，所以 $AC^2=AE^2+CE^2$，即 $\angle AEC=90°$. 又 $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\triangle ACE\backsim\triangle AFE$，

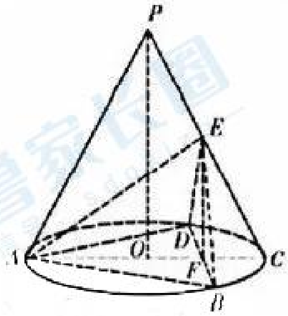
所以 $\angle AFE=\angle AEC=90°$，即 $EF\perp AC$. ……………………………………… 3 分

又 PO，AC，$EF\subset$ 平面 PAC，直线 $EF/\!/PO$，$PO\not\subset$ 平面 BDE，$EF\subset$ 平面 BDE，

所以直线 $PO/\!/$ 平面 BDE. ……………………………………………………… 4 分

(2)因为 $PO/\!/EF$，$PO\perp$ 平面 ABD，所以 $EF\perp$ 平面 ABD，

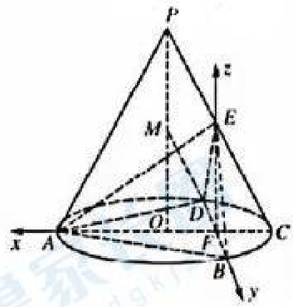
又 $EF\subset$ 平面 BED，所以平面 $BED\perp$ 平面 ABD. …… 6 分



(3)易知 $PO=2EF=\sqrt{3}$. 以点 F 为坐标原点，FA，FB，FE 所在直线分别为 x 轴，y 轴，z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，

则 $A(\dfrac{3}{2},0,0)$，$B(0,\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，$D(0,-\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，$E(0,0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$P(\dfrac{1}{2},0,\sqrt{3})$，$O(\dfrac{1}{2},0,0)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(-\dfrac{3}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{AE}=(-\dfrac{3}{2},0,\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，$\overrightarrow{DO}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},0)$，$\overrightarrow{OP}=(0,0,\sqrt{3})$，……………………………… 7 分



设平面 ABE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0\\ \overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0\\ -\sqrt{3}x+z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$.

……………………………………………………………… 8 分

设 $\overrightarrow{OM}=\lambda\,\overrightarrow{OP}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，可得 $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OM}=(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\lambda)$.

设直线 DM 与平面 ABE 所成的角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{DM}>|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DM}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{DM}|}=\dfrac{|3\lambda+2|}{\sqrt{7}\times\sqrt{3\lambda^2+1}}$.

$\sin^2\theta=\frac{9\lambda^2+12\lambda+4}{7(3\lambda^2+1)}=\frac{1}{7}(3+\frac{12\lambda+1}{3\lambda^2+1})$，

令 $y=\frac{12x+1}{3x^2+1}$，$x\in[0,1]$，则 $y=\frac{12x+1}{3x^2+1}=4(\frac{x+\frac{1}{12}}{x^2+\frac{1}{3}})=4[\frac{x+\frac{1}{12}}{(x+\frac{1}{12}-\frac{1}{12})^2+\frac{1}{3}}]=$

$\frac{4}{x+\frac{1}{12}+\frac{\frac{49}{144}}{x+\frac{1}{12}}-\frac{1}{6}}\leqslant\frac{4}{2\cdot\sqrt{(x+\frac{1}{12})\cdot(\frac{\frac{49}{144}}{x+\frac{1}{12}})}-\frac{1}{6}}=4$，当且仅当 $x=\frac{1}{2}$ 时，等号成立，

所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$y=\frac{12x+1}{3x^2+1}$ 有最大值4，

即当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，$\sin\theta$ 的最大值为1，此时点 $M(\frac{1}{2},0,\frac{\sqrt{3}}{2})$，………………………… 10分

所以 $\overrightarrow{MA}=(1,0,-\frac{\sqrt{3}}{2})$，

所以点 M 到平面 ABE 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{MA}\cdot n|}{|n|}=\frac{|(1,0,-\frac{\sqrt{3}}{2})\cdot(1,\sqrt{3},\sqrt{3})|}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{14}$，

故当直线 DM 与平面 ABE 所成角的正弦值最大时，点 M 到平面 ABE 的距离为 $\frac{\sqrt{7}}{14}$. ……

……………………………………………………………………………………………… 12分

21. 解：(1)由题意得，$\frac{b^2}{a^2}=1-e^2=\frac{1}{2}$，$\frac{3}{a^2}+\frac{3}{2b^2}=1$，解得 $\begin{cases}a^2=6\\b^2=3\end{cases}$，………………… 2分

则椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………………… 3分

(2)①证法一：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，把 $y=-\frac{1}{2}x+m$ 与椭圆 C 的标准方程联立，消去 y，可得 $3x^2-4mx+4m^2-12=0$，

注意到 x_1,x_2 为方程 $3x^2-4mx+4m^2-12=0$ 的两根，

故有恒等式 $3x^2-4mx+4m^2-12=3(x-x_1)(x-x_2)$，

则 $3x_0^2-4mx_0+4m^2-12=3(x_0-x_1)(x_0-x_2)$，………………………………… 5分

同理，把 $y=-\frac{1}{2}x+m$ 与椭圆 C 的标准方程联立，消去 x，可得 $3y^2-4my+2m^2-3=0$，

注意到 y_1,y_2 为方程 $3y^2-4my+2m^2-3=0$ 的两根，

故有恒等式 $3y^2-4my+2m^2-3=3(y-y_1)(y-y_2)$，

则 $3y_0^2-4my_0+2m^2-3=3(y_0-y_1)(y_0-y_2)$，…………………………………… 6分

则 $k_{PA}k_{PB}=\frac{(y_0-y_1)(y_0-y_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{3y_0^2-4my_0+2m^2-3}{3x_0^2-4mx_0+4m^2-12}=\lambda$，

所以 $4m(\lambda x_0-y_0)+2m^2(1-2\lambda)+3y_0^2-3\lambda x_0^2-3+12\lambda=0$，

若 $k_{PA}k_{PB}$ 为定值，则必有 $\begin{cases}\lambda x_0-y_0=0\\1-2\lambda=0\\3y_0^2-3\lambda x_0^2-3+12\lambda=0\end{cases}$，

计算可得 $\begin{cases}x_0=2\\y_0=1\\\lambda=\frac{1}{2}\end{cases}$，$\begin{cases}x_0=-2\\y_0=-1\\\lambda=\frac{1}{2}\end{cases}$，

故 $\lambda=\frac{1}{2}$. ………………………………………………………… 8 分

证法二：设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$P(x_0,y_0)$，把 $y=-\frac{1}{2}x+m$ 与椭圆 C 的标准方程联立，消去 y，可得 $3x^2-4mx+4m^2-12=0$，

$\Delta=144-32m^2=16(9-2m^2)>0$，$x_1+x_2=\frac{4m}{3}$，$x_1x_2=\frac{4m^2-12}{3}$，

则 $(x_0-x_1)(x_0-x_2)=x_0^2-x_0(x_1+x_2)+x_1x_2=x_0^2-\frac{4m}{3}x_0+\frac{4m^2-12}{3}$，………… 5 分

同理，把 $y=-\frac{1}{2}x+m$ 与椭圆 C 的标准方程联立，消去 x，可得 $3y^2-4my+2m^2-3=0$，

$y_1+y_2=\frac{4m}{3}$，$y_1y_2=\frac{2m^2-3}{3}$，

则 $(y_0-y_1)(y_0-y_2)=y_0^2-(y_1+y_2)y_0+y_1y_2=y_0^2-\frac{4m}{3}y_0+\frac{2m^2-3}{3}$，…………… 6 分

下面步骤同证法一.

②不妨设点 $P(-2,-1)$，点 $Q(2,1)$，点 P，点 Q 到直线 l 的距离分别是 d_1，d_2，

因为 $1\leqslant m<2$，$d_1=\frac{2|m+2|}{\sqrt{5}}=\frac{2(m+2)}{\sqrt{5}}$，$d_2=\frac{2|m-2|}{\sqrt{5}}=\frac{2(2-m)}{\sqrt{5}}$，

所以 $d_1+d_2=\frac{8}{\sqrt{5}}$. ………………………………………………………… 9 分

$|AB|=\sqrt{1+(-\frac{1}{2})^2}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{4}}\frac{\sqrt{16(9-2m^2)}}{3}=\frac{2\sqrt{5}\sqrt{9-2m^2}}{3}$，

四边形 $PAQB$ 的面积 $S=\frac{1}{2}|AB|(d_1+d_2)=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{5}\sqrt{9-2m^2}}{3}\times\frac{8}{\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{9-2m^2}}{3}\leqslant\frac{8\sqrt{7}}{3}$

（当 $m=1$ 时取等号），

所以四边形 $PAQB$ 面积的最大值是 $\frac{8\sqrt{7}}{3}$. ………………………………………… 12 分

22. 解：(1) $f(x)=x^2+ax-e^x$ 有两个极值点 x_1，x_2，即函数 $f'(x)$ 有两个零点，不妨设 $x_1>x_2$，

$f'(x)=2x+a-e^x(x\in\mathbf{R})$，……………………………………………… 1 分

设 $g(x)=2x+a-e^x$，则 $g'(x)=2-e^x$，

令 $2-e^x=0$ 得，$x=\ln2$，

则 $g(x)$ 在 $(-\infty,\ln2)$ 上单调递增，在 $(\ln2,+\infty)$ 上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(\ln2)=2\ln2+a-2>0$，得 $a>2-2\ln2>0$，………………… 3 分

$g(-\frac{a}{2})=-e^{-\frac{a}{2}}<0$，存在 $x_2\in(-\frac{a}{2},\ln2)$，使得 $g(x_2)=0$，……………… 4 分

令 $y=e^x-x^2(x>2)$.

所以 $y'=e^x-2x>0$ 在 $(2,+\infty)$ 上恒成立，所以 $y=e^x-x^2$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，

又 $e^2-2^2>0$，故 $e^x>x^2$ 在 $(2,+\infty)$ 上恒成立，

$g(a+2)=2(a+2)+a-e^{a+2}<2a+4+a-(a+2)^2=-a^2-a<0$，

存在 $x_1\in(\ln2,a+2)$，使得 $g(x_1)=0$，

所以 a 的取值范围是 $(2-2\ln2,+\infty)$.……………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 得，$2x_1+a-e^{x_1}=2x_2+a-e^{x_2}(x\in\mathbf{R})$，不妨设 $x_1>x_2$，

则 $2x_1-2x_2=e^{x_1}-e^{x_2}$，即 $\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}=2$，……………………………………… 7 分

要证 $x_1+x_2<\ln4$，即证 $e^{x_1+x_2}<4$，

即 $2>\sqrt{e^{x_1+x_2}}$，

只需证 $\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{x_1-x_2}>e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$，则 $\frac{e^{x_1}-e^{x_2}}{e^{\frac{x_1+x_2}{2}}}>x_1-x_2$，

即 $e^{\frac{x_1-x_2}{2}}-e^{\frac{x_2-x_1}{2}}>x_1-x_2$，……………………………………………… 9 分

令 $t=\frac{x_1-x_2}{2}(t>0)$，$h(t)=e^t-e^{-t}-2t$，$e^t>1$，

$h'(t)=e^t+e^{-t}-2>2\sqrt{e^te^{-t}}-2=0$，

所以 $h(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，

则 $h(t)>h(0)=1-1-0=0$，……………………………………………… 11 分

即 $2>\sqrt{e^{x_1+x_2}}$ 成立，

所以 $x_1+x_2<\ln4$. ……………………………………………

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq**。

微信搜一搜

齐鲁家长圈

打开“微信 / 发现 / 搜一搜”搜索