

2022—2023 学年度上学期期末考试数学答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	B	B	C	D	D	C	AB	AC	ACD	AD

二、填空题

13. $-\frac{13}{2}$; 14. $-\frac{55}{16}$; 15. $\left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$; 16. $\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$; $(0, 1]$.

三、解答题

17. 解析: (I) $\because a_1 = 1, \left\{ \frac{S_n}{n} \right\}$ 是公比为 2 的等比数列

$$\therefore \frac{S_n}{n} = \frac{S_1}{1} \times 2^{n-1}, \text{ 可得: } S_n = n \times 2^{n-1}.$$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } a_n = S_n - S_{n-1} = n \cdot 2^{n-1} - (n-1) \cdot 2^{n-2} = (n+1) \cdot 2^{n-2}$$

$$\text{当 } n=1 \text{ 时, } a_1 = 1 \text{ 满足 } a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}.$$

综上, $a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$ 5 分

$$(II) \text{ 由 (I) 知, } a_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}, \therefore \frac{2^n}{na_n} = \frac{2^n}{n(n+1)2^{n-2}} = \frac{4}{n(n+1)} = 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

因此,

$$\frac{2}{1 \cdot a_1} + \frac{2^2}{2 \cdot a_2} + \frac{2^3}{3 \cdot a_3} + \cdots + \frac{2^n}{n \cdot a_n} = 4\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 4\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 4 - \frac{4}{n+1} < 4. \cdots \cdots 10 \text{ 分}$$

18. 解析: (I) 连结 AB_1 , $\because$ 平面 $ABC \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 且 $AB \perp BC$,

$\therefore BC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ,

又 $\because B_1C_1 \parallel BC$, $\therefore B_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 , 又 $\because A_1B \subset$ 平面 ABB_1A_1 ,

$\therefore A_1B \perp B_1C_1$ ①

而平行四边形 ABB_1A_1 中, $AB = AA_1$, 所以, 四边形 ABB_1A_1 为菱形, $\therefore A_1B \perp AB_1$ ②

又 $\because AB_1 \cap B_1C_1 = B_1$ ③

由①②③可得, $A_1B \perp$ 平面 AB_1C_1

$\therefore A_1B \perp AC_1$ 6 分

(II) 延长 A_1B_1 至 G 使 $B_1G = 1$, 连接 BG , 因为 $\angle ABB_1 = \frac{\pi}{3}$.

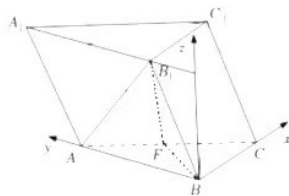
则 $BG \perp A_1G, BG \perp BC, AB \perp BC$

建立如图所示的空间直角坐标系,

其中各点坐标为: $B(0, 0, 0), C(1, 0, 0), B_1(0, 1, \sqrt{3}), F\left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$

$$\overrightarrow{BF} = \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right), \overrightarrow{BB_1} = (0, 1, \sqrt{3}), \overrightarrow{BC} = (1, 0, 0)$$

设平面 FBB_1 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$



$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BF} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \text{. 取 } y = -\sqrt{3}, \text{ 则 } x = 2\sqrt{3}, z = 1.$$

那么, $\vec{n} = (2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$

设平面 BB_1C 的一个法向量为 $\vec{m} = (a, b, c)$.

$$\text{则} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BB_1} = 0 \end{cases} \text{即} \begin{cases} x = 0 \\ y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases} \text{. 取 } y = \sqrt{3}, \text{ 则 } x = 0, z = -1.$$

那么, $\vec{m} = (0, \sqrt{3}, -1)$.

设二面角 $F-BB_1-C$ 的平面角为 θ , 由图可知为锐二面角.

$$\text{所以 } \cos \theta = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|-\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 1|}{\sqrt{(2\sqrt{3})^2 + (-\sqrt{3})^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. 解析: (I) 由余弦定理有: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

又 $\because c^2 = b(a+b)$,

可得, $b = a - 2b \cos C$, 再由正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

则有, $\sin B = \sin A - 2 \sin B \cos C$

$\because A + B + C = \pi \Leftrightarrow A = \pi - (B + C) \therefore \sin A = \sin(B + C)$

那么, $\sin B = \sin A - 2 \sin B \cos C = \sin(B + C) - 2 \sin B \cos C$

可得, $\sin B = \sin(B + C) - 2 \sin B \cos C = \sin B \cos C + \cos B \sin C - 2 \sin B \cos C = \sin(C - B)$

解得: $B = C - B$ 或 $B + C - B = \pi$ (舍去)

即 $C = 2B$ 6 分

(II) 由 $c^2 - b^2 = ab$, 可得 $\frac{a}{b+c} = \frac{c}{b} - 1$

再由正弦定理可得, $\frac{a}{b+c} = \frac{\sin C}{\sin B} - 1$,

由(I)知: $C = 2B$, 且 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 可得 $0 < 2B < \frac{\pi}{2}, 0 < B < \frac{\pi}{2}, 0 < \pi - 3B < \frac{\pi}{2}$.

则 $\frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{4}$;

$\therefore \frac{a}{b+c} = \frac{\sin C}{\sin B} - 1 = \frac{\sin 2B}{\sin B} - 1 = 2 \cos B - 1 \in (\sqrt{2} - 1, \sqrt{3} - 1)$ 12 分

20. 解析: (I) 中国队的九个对手在前六轮的排布情况总数为 A_9^6 , 若四个主要对手都出现在前六轮交锋, 则前六轮的排布情况为 $C_5^2 A_6^6$,

$\therefore$ 中国队在前六轮之内完成与主要对手交锋的概率为 $P = \frac{C_5^2 A_6^6}{A_9^6} = \frac{10 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4} = \frac{5}{42}$ 4 分

(II) X 可取值为 1、2、3,

则 $P(X = 3) = 60\% \times 40\% = 24\%$,

$P(X = 2) = 40\% \times (70\% \times 60\% + 30\% \times 40\%) + 60\% \times 60\% \times 60\% = 43.2\%$,

$P(X = 1) = 40\% \times (70\% \times 40\% + 30\% \times 60\%) + 60\% \times 60\% \times 40\% = 32.4\%$.

∴其分布列如下：

X	1	2	3
P	32.4%	43.2%	24%

其数学期望为 $E(X) = 1 \times 0.324 + 2 \times 0.432 + 3 \times 0.24 = 1.908$ (名)12 分

21. 解：(I) 由题设 $c = 4, \frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ，而 $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - a^2$ ，可得： $a^2 = 4, b^2 = 12$

所以双曲线 C 的方程为： $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$4 分

(II) (i) 由题意得 $F(4, 0), N(1, 0)$.

设 $A(m, n)$ ，则 $B(m, -n)(n \neq 0), \frac{m^2}{4} - \frac{n^2}{12} = 1$. ①

AF 与 BN 的方程分别为： $n(x-4)-(m-4)y=0, n(x-1)+(m-1)y=0$.

设 $G(x_0, y_0)$ ，则有 $\begin{cases} n(x_0-4)-(m-4)y_0=0 \\ n(x_0-1)+(m-1)y_0=0 \end{cases}$

可得： $x_0 = \frac{5m-8}{2m-5}, y_0 = \frac{-3n}{2m-5}$.

由于 $\frac{x_0^2}{4} - \frac{y_0^2}{12} = \frac{(5m-8)^2}{4(2m-5)^2} - \frac{9n^2}{12(2m-5)^2} = \frac{(5m-8)^2 - 9m^2 + 36}{4(2m-5)^2} = 1$.

所以点 G 恒在双曲线 C 上.10 分

(ii) 1812 分

22. 解析：(I) $f'(x) = \cos x - \frac{1}{x+1}$ ；而 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时， $f'(x) < 0$.

则 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递减；

而 $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - \ln(1 + \frac{\pi}{2}) > 0, f(\pi) = 0 - \ln(1 + \pi) < 0$.

所以， $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上有唯一零点.

即存在唯一 $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ ，使 $f(x_0) = 0$3 分

(II) 令 $t = \pi - x$ ，则 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时， $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

设 $u(t) = g(\pi - t) = -\cos t + t + 1 - (t+1)\ln(t+1)$5 分

$u'(t) = \sin t + 1 - \ln(t+1) - 1 = \sin t - \ln(t+1) = f(t)$

由 (I) 得，当 $t \in (\frac{\pi}{2}, x_0)$ 时， $u'(t) > 0$ ，当 $t \in (x_0, \pi)$ 时， $u'(t) < 0$.

在 $(\frac{\pi}{2}, x_0)$ 上 $u(t)$ 是增函数, 又 $u(\frac{\pi}{2}) = 1 - \ln(\frac{\pi}{2} + 1) > 0$, 从而当 $t \in (\frac{\pi}{2}, x_0]$ 时, $u(t) > 0$.

所以 $u(t)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, x_0]$ 上无零点.

在 (x_0, π) 上 $u(t)$ 为减函数,

由 $u(x_0) > 0, u(\pi) = 2 + \pi - (\pi + 1)\ln(\pi + 1) < 2 + \pi - (3.14 + 1)\ln(3 + 1) = 2 + \pi - 4.14 \times 2 \ln 2 < 0$.

知存在唯一 $t_1 \in (x_0, \pi)$, 使 $u(t_1) = 0$.

所以存在唯一的 $x_1 = \pi - t_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $g(x_1) = g(\pi - t_1) = u(t_1) = 0$.

所以存在唯一的 $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使 $g(x_1) = 0$.

因为 $x_1 = \pi - t_1, t_1 > x_0$, 所以 $x_0 + x_1 < \pi$ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线