

甘肃省 2024 届新高考备考模拟考试

数学试卷

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

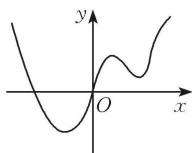
1. 已知集合 $M = \{x | \log_2 x < 3\}$, $N = \{x | x > -1\}$, 则 $M \cap N =$
 A. $(-1, 8)$ B. $(-1, 6)$ C. $(0, 8)$ D. $(0, 6)$
 2. 已知 i 是虚数单位，若 $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + i$, 则 $z = z_1 \cdot \bar{z}_2$ 在复平面内对应的点位于
 A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
 3. 使“ $a < b$ ”成立的一个充分不必要条件是
 A. $\forall x \in (0, 1], a \leq b + x$ B. $\forall x \in (0, 1], a + x < b$
 C. $\exists x \in [0, 1], a < b + x$ D. $\exists x \in [0, 1], a + x \leq b$
 4. 已知图 1 对应的函数为 $y = f(x)$, 则图 2 对应的函数是
 A. $y = f(-x)$
 B. $y = f(|x|)$
 C. $y = -f(-x)$
 D. $y = f(-|x|)$
- 

图1

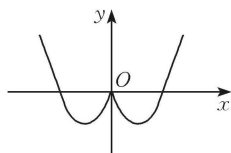


图2
5. 设 F 为抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点，点 A 在 C 上，点 $B(4, 0)$, 若 $|AF| = |BF|$, 则 AB 的中点到 y 轴的距离是
 A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $3\sqrt{2}$
 6. 已知函数 $f(x) = e^x - ax + b$, $g(x) = x^2 - x$. 若曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 在公共点 $A(1, 0)$ 处有相同的切线，则 a, b 的值分别为
 A. $e-1, -1$ B. $-1, e-1$
 C. $e, -1$ D. $-1, e$

7. 如图所示的“数字塔”有如下规律:每一层最左与最右的数字均为 3,除此之外每个数字均为两肩的数字之积,则该“数字塔”前 7 层的所有数字之积最接近(参考数据: $\lg 3 \approx 0.477$)

$$\begin{array}{c} 3 \\ 3 \quad 3 \\ 3 \quad 9 \quad 3 \\ 3 \quad 27 \quad 27 \quad 3 \end{array}$$

- A. 10^{50} B. 10^{60} C. 10^{70} D. 10^{80}

8. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 为等边三角形, $PA=PB$, $\angle ACP=90^\circ$, $PC+AC=4$,则三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积的最小值为

- A. $\frac{32\pi}{7}$ B. $\frac{64\pi}{7}$ C. $\frac{80\pi}{7}$ D. $\frac{124\pi}{7}$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 若 $a > 0 > b > c$, 则

- A. $\frac{a}{c} > \frac{a}{b}$ B. $b^{2a} > c^{2a}$
C. $\frac{a-b}{a-c} > \frac{b}{c}$ D. $a-c \geq 2\sqrt{(a-b)(b-c)}$

10. 若一组样本数据 x_1, x_2, \dots, x_{10} 的平均数为 x ($x \neq 0$), 标准差为 s , 另一组样本数据 $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{20}$ 的平均数为 $3x$, 标准差为 s . 两组数据合成一组新数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}, x_{11}, x_{12}, \dots, x_{20}$, 新数据的平均数为 y , 标准差为 s' , 则

- A. $y > 2x$ B. $y = 2x$
C. $s' > s$ D. $s' = s$

11. 已知函数 $f(x) = 2\sin^2 x - 3\sin|x| + 1$, 则

- A. $f(x)$ 是偶函数 B. $f(x)$ 在区间 $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ 上单调递增
C. $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 4 个零点 D. $f(x)$ 的值域是 $[0, 6]$

12. 设直线 $l: y = kx + 3$ ($k \in \mathbf{R}$) 与圆 $C: x^2 + y^2 = 4$, 则下列结论正确的为

- A. l 可能将 C 的周长平分
B. 若圆 C 上存在两个点到直线 l 的距离为 1, 则 k 的取值范围为 $(-2\sqrt{2}, 0) \cup (0, 2\sqrt{2})$
C. 若直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 2
D. 若直线 l 与圆 C 交于 A, B 两点, 则 AB 中点 M 的轨迹方程为 $x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知一个圆柱的轴截面为正方形,且它的侧面积为 16π ,则该圆柱的体积为_____.

14. 已知向量 $a = (-2, \cos \alpha)$, $b = (1, \sin \alpha)$, 且 $a \parallel b$, 则 $\frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2 \alpha + 3} =$ _____.

15. 干支纪年是中国古代的一种纪年法. 分别排出十天干与十二地支如下:

天干: 甲 乙 丙 丁 戊 己 庚 辛 壬 癸

地支: 子 丑 寅 卯 辰 巳 午 未 申 酉 戌 亥

把天干与地支按以下方法依次配对: 把第一个天干“甲”与第一个地支“子”配出“甲子”, 把第二个天干“乙”与第二个地支“丑”配出“乙丑”, ..., 若天干用完, 则再从第一个天干开始循环使用, 若地支用完, 则再从第一个地支开始循环使用. 已知 2023 年是癸卯年, 则 $13^8 + 2$ 年以后是_____年.

16. 已知 O 为坐标原点, F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, $|F_1F_2| = 6$, P 是椭圆上异于顶点的一点, 点 Q 是以 PF_2 为底的等腰 $\triangle F_1PF_2$ 的内切圆的圆心, 过 F_1 作 $F_1M \perp PQ$ 于点 M , $|OM| = 1$, 则椭圆的离心率为_____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 现给出下列三个条件: ① $3a_2 + a_4 = 64$; ② $S_5 = 100$; ③ $S_7 = 5a_5 + 16$. 请你从这三个条件中任选两个解答下列问题.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 3, b_n - b_{n-1} = a_n (n \geq 2)$, 设数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 求证: $\frac{1}{3} \leq T_n < \frac{1}{2}$.

注: 如果选择多个条件分别进行解答, 按第一个解答进行计分.

18. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边, 且满足 $\tan A : \tan B : \tan C = 1 : 2 : 3$.

(1) 求角 A 的大小;

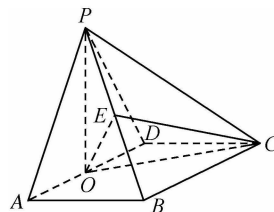
(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 6, 求 b 的值.

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $\triangle PAD$ 是正三角形, 且平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AB = 1$, O 为棱 AD 的中点, E 为棱 PB 的中点.

(1) 求证: $OE \parallel$ 平面 PCD ;

(2) 若直线 PD 与平面 OCE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{8}$, 求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积.



20. (本小题满分 12 分)

现有甲、乙两名运动员争夺某项比赛的奖金,规定两名运动员谁先赢 $k(k>1, k \in \mathbf{N}^*)$ 局,谁便赢得全部奖金 a 元. 假设每局甲赢的概率为 $p(0<p<1)$, 乙赢的概率为 $1-p$, 且每场比赛相互独立. 在甲赢了 $m(m<k)$ 局, 乙赢了 $n(n<k)$ 局时, 比赛意外终止, 奖金如何分配才合理? 评委会给出的方案是: 甲、乙按照比赛再继续进行下去各自赢得全部奖金的概率之比 $P_{\text{甲}} : P_{\text{乙}}$ 分配奖金.

(1) 若 $k=3, m=2, n=1, p=\frac{3}{4}$, 求 $P_{\text{甲}} : P_{\text{乙}}$;

(2) 记事件 A 为“比赛继续进行下去乙赢得全部奖金”, 试求当 $k=4, m=2, n=2$ 时比赛继续进行下去甲赢得全部奖金的概率 $f(p)$, 并判断当 $\frac{6}{7} \leq p < 1$ 时, 事件 A 是否为小概率事件, 并说明理由. 规定: 若随机事件发生的概率小于 0.06, 则称该随机事件为小概率事件.

21. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , C 的离心率为 2, 直线 l 过 F_2 与 C 交于 M, N 两点, 当 $|OM| = |OF_2|$ 时, $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 3.

(1) 求双曲线 C 的方程;

(2) 已知 M, N 都在 C 的右支上, 设 l 的斜率为 m .

① 求实数 m 的取值范围;

② 是否存在实数 m , 使得 $\angle MON$ 为锐角? 若存在, 请求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + ax \ln x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 求 a 的取值范围;

(2) 若 $a=1$, 证明: $f(x) \geq x - e^{-x}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



Q 自主选拔在线

