高三数学考试(理科)

考生注意:

1. 本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容:高考全部内容。

第Ⅰ卷

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{x\in\mathbf{N}\mid x\leqslant 2\}$,则 $A\cup B=$

A. $\{2,3\}$　　B. $\{0,1,2,3\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{1,2,3\}$

2. $\frac{2-4i}{i}=$

A. $-4-2i$　　B. $-4+2i$　　C. $-2-4i$　　D. $4-2i$

3. 设 $a=e^{0.01}$,$b=\log_{\pi}e$,$c=\ln\frac{1}{\pi}$,则

A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

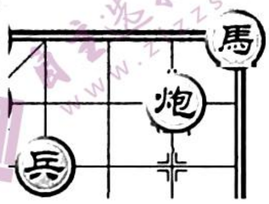
4.《周髀算经》中有这样一个问题:冬至、小寒、大寒、立春、雨水、惊蛰、春分、清明、谷雨、立夏、小满、芒种这十二个节气,自冬至日起,其日影长依次成等差数列,立春当日日影长为 9.5 尺,立夏当日日影长为 2.5 尺,则春分当日日影长为

A. 4.5 尺　　B. 5 尺　　C. 5.5 尺　　D. 6 尺

5. 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-\frac{13}{3}$ 的极大值点为

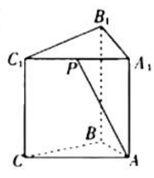
A. 1　　B. 2　　C. 4　　D. $\frac{7}{3}$

6. 象棋,亦作"象碁"、中国象棋,中国传统棋类益智游戏,在中国有着悠久的历史,属于二人对抗性游戏的一种.由于用具简单,趣味性强,象棋成为流行极为广泛的棋艺活动.中国象棋是中国棋文化也是中华民族的文化瑰宝.某棋局的一部分如图所示,若不考虑这部分以外棋子的影响,且"马"和"炮"不动,"兵"只能往前走或左右走,每次只能走一格,从"兵""吃掉""马"的最短路线中随机选择一条路线,则该路线能顺带"吃掉""炮"的概率为



A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{3}{5}$　　D. $\frac{3}{4}$

7. 如图,在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$AC=CC_1$,P 是 A_1C_1 的中点,则异面直线 BC 与 AP 所成角的余弦值为

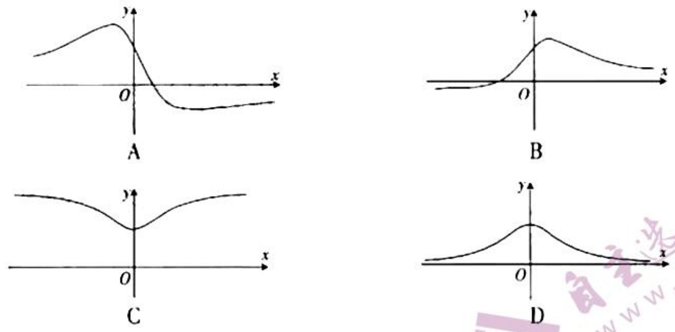


A. 0　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{10}$

1
官方微信公众号:zizzsw　　咨询热线:010-5601 9830
官方网站:www.zizzs.com　　微信客服:zizzs2018

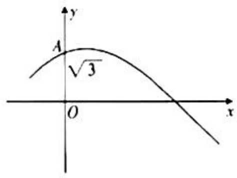
8. 函数 $f(x)=\frac{ax+1}{x^2+1}$ 的大致图象不可能是



9. 在 $(x-\frac{a}{x^2})^5$ 的展开式中，x^2 的系数是 -10，则 $a=$

A. -2　　B. -1　　C. 1　　D. 2

10. 函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $\varphi=$



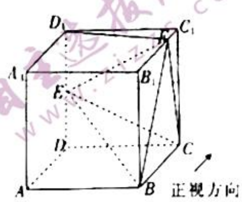
A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $-\frac{\pi}{3}$

C. $-\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，直线 $x-c=0$ 与双曲线 C 的一个交点为点 P，与双曲线 C 的一条渐近线交于点 Q，O 为坐标原点，若 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OF_2}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$，则双曲线 C 的离心率为

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{3}$

12. 如图，E 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 棱 DD_1 的中点，F 是棱 B_1C_1 上的动点，现有下列命题：①存在点 F 使得 $CF\perp EB$；②存在点 F 使得 $D_1F\parallel BE$；③存在点 F 使得△BEF 的正视图和侧视图的面积相等；④四面体 $EBFC$ 的体积为定值. 其中所有正确命题的序号为



A. ①③④　　B. ①③

C. ③④　　D. ①②④

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 向量 $\boldsymbol{a}=(3,x)$，$\boldsymbol{b}=(4,2)$. 若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $x=$ ▲ .

14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>0$，其前 n 项和为 S_n，且 $S_2=6$，$S_3=14$，则 $a_1=$ ▲

15. 已知实数 x，y 满足 $\begin{cases}2x-y\leqslant 2,\\x+y\geqslant 2,\\x-y\geqslant -1,\end{cases}$ 则 $z=\frac{y}{x+2}$ 的最大值为 ▲

16. 已知圆 $C:x^2+(y+1)^2=16$，P 是圆 C 上的动点. 若 $A(0,1)$，线段 PA 的垂直平分线与直线 PC 相交于点 Q，则点 Q 的轨迹方程是 ▲ ；若 $M(2,1)$，则 $|MQ|+|QC|$ 的最大值为 ▲ .（本题第一空 3 分，第二空 2 分）

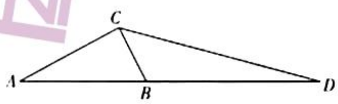
三、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答.

(一)必考题:共 60 分.

17.(12 分)

三角测量法是在地面上选定一系列的点,并构成相互连接的三角形,由已知的点观察各方向的水平角,再测定起始边长,以此边长为基线,即可推算各点坐标的一种测量方法. 在实际测量中遇到高大障碍物的测量,需要跨越时的测量,无法得到平距的测量都需要用到三角测量法. 如图,为测量横截面为直角三角形的某模型的平面图$\triangle ABC$,由于实际情况,$Rt\triangle ABC$ ($\angle ACB=\frac{\pi}{2}$)的边和角无法测量,以下为可测量数据:①$BD=2$;②$CD=\sqrt{3}-1$;③$\angle BDC=\frac{\pi}{6}$;④$\angle BCD=\frac{\pi}{4}$. 以上可测量数据中至少需要几个可以推算出$Rt\triangle ABC$的面积? 请选择一组并写出推算过程.

注:若选择不同的组合分别作答,则按第一个作答计分.

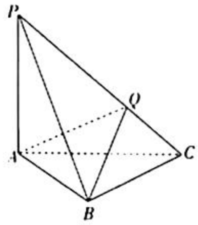


18.(12 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$\triangle ABC$ 为等边三角形,$PA=AB=2$,$PB=PC=2\sqrt{2}$.

(1)证明:$BC\perp PA$.

(2)若$\overrightarrow{PQ}=2\overrightarrow{QC}$,求二面角 $B-AQ-C$ 的余弦值.



19.(19 分)

数独是源自 18 世纪瑞士的一种数学游戏,玩家需要根据 9×9 盘面上的已知数字,推理出所有剩余空格的数字,并满足每一行、每一列、每一个粗线宫(3×3)内的数字均含 1～9,且不重复. 数独爱好者小明打算报名参加"丝路杯"全国数独大赛初级组的比赛.

(1)赛前小明在某数独 APP 上进行了一段时间的训练,每天解题的平均速度 y(秒/题)与训练天数 x(天)有关,经统计得到如下数据:

x(天)	1	2	3	4	5	6	7
y(秒/题)	910	800	600	440	300	240	210

现用 $y=a+\frac{b}{x}$ 作为回归方程模型,请利用表中数据,求出该回归方程(a,b 用分数表示).

(2)小明和小红在数独 APP 上玩"对战赛",每局两人同时开始解一道数独题,先解出题的人获胜,不存在平局,两人约定先胜 3 局者赢得比赛. 若小明每局获胜的概率为$\frac{2}{3}$,且各局之间相互独立,设比赛 X 局后结束,求随机变量 X 的分布列及期望.

参考数据(其中 $t_i=\frac{1}{x_i}$):

$\sum_{i=1}^{7}t_iy_i$	$\bar{t}$	$\sum_{i=1}^{7}t_i^2-7\times\bar{t}^2$
1750	0.37	0.55

参考公式：对于一组数据(u_1,v_1)，(u_2,v_2)，…，(u_n,v_n)，其回归直线 $\hat{v}=\hat{\alpha}+\hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为$\hat{\beta}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}u_iv_i-n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^{n}u_i^2-n\bar{u}^2}$，$\hat{\alpha}=\bar{v}-\hat{\beta}\bar{u}$.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=(x^2-2ax)\ln x+ax$.

(1)若曲线 $y=f(x)$在 $x=1$ 处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 平行，求实数 a 的值；

(2)当 $x\in(0,\sqrt{e})$时，$f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

21.（12 分）

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$上的点 $P(x_0,1)$到其焦点 F 的距离为 2.

(1)求抛物线 C 的方程及点 F 的坐标.

(2)过抛物线 C 上一点 Q 作圆 $M:x^2+(y-3)^2=4$ 的两条斜率都存在的切线，分别与抛物线 C 交于异于点 Q 的 A，B 两点. 证明：直线 AB 与圆 M 相切.

(二)选考题：共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修 4－4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=-1+\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(1)求曲线 C_1 的普通方程与曲线 C_2 的直角坐标方程；

(2)设点 $M(1,0)$，若曲线 C_1，C_2 相交于 A，B 两点，求$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$的值.

23.[选修 4－5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x-4|$.

(1)求不等式 $f(x)+f(5-x)\leqslant 5$ 的解集；

(2)设函数 $g(x)=f(x)-f(x+2)$的最大值为 M. 若 $a+b=M$，且 $a>0$，$b>0$，求$\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b-4}$的最小值.

高三数学考试参考答案(理科)

1.B　因为 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{0,1,2\}$，所以 $A\cup B=\{0,1,2,3\}$.

2.A　$\frac{2-i}{i}=-1-2i$.

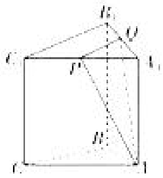
3.B　因为 $a=e$[illegible]>1，$b=\log_{\pi}e\in(0,1)$，$c=\ln\frac{1}{\pi}<0$，所以 $a>b>c$.

4.D　设十二节气自冬至日起的日影长构成的等差数列为 $\{a_n\}$，则立春当日日影长为 $a_4=9.5$，立夏当日日影长为 $a_{10}=2.5$，所以春分当日日影长为 $a_7=\frac{1}{2}(a_4+a_{10})=6$.

5.B　因为 $f'(x)=x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,2)$，$(4,+\infty)$ 上单调递增，在 $(2,4)$ 上单调递减，故 $f(x)$ 的极大值点为 2.

6.C　由题意可知，“兵”“吃掉”“马”的最短路线中，横走三步，竖走两步，相当于“横横横竖竖”五个汉字排成一列，有 $C_5^2=10$ 条路线. 其中能顺带“吃掉”“炮”的路线，分两步，第一步，“横横竖”三个汉字排成一列；第二步，“横竖”两个汉字排成一列，共有 $C_3^1\times C_2^1=6$ 条路线. 故所求概率为 $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.

7.D　如图，取 A_1B_1 的中点 Q，连接 PQ，AQ.



因为 $BC_1/\!/PQ$，所以 $\angle APQ$ 即异面直线 BC_1 与 AP 所成的角.

设 $AC=CC_1=2$，则 $AP=AQ=\sqrt{5}$，$PQ=1$，故 $\cos\angle APQ=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.

8.C　当 $a<0$ 时，$f(x)$ 的大致图象如选项 A 所示；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 的大致图象如选项 B 所示；当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的大致图象如选项 D 所示.

9.D　$(x-\frac{a}{x^2})^5$ 展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r x^{5-r}(-a)^r x^{-2r}=C_5^r(-a)^r x^{5-3r}$.

令 $5-3r=2$，得 $r=1$. 由 $C_5^1(-a)^1=-10$，得 $a=2$.

10.A　因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x+\varphi)+\cos(\omega x+\varphi)=2\sin(\omega x+\varphi+\frac{\pi}{6})$，所以 $f(0)=2\sin(\varphi+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}$. 因为 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi+\frac{\pi}{6}\in(-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$，所以 $\varphi+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$.

11.B　因为 $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OF}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OQ}$，所以 $\overrightarrow{FP}=2\overrightarrow{PQ}$，所以 $\overrightarrow{FP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FQ}$.

所以 $\frac{b}{a}=\frac{2}{3}\times\frac{bc}{a}$，得 $2c=3b$，故 $e=\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

12.A　设正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，以 D 为坐标原点，DA，DC，DD_1 所在直线分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系(图略)，则 $B(2,2,0)$，$E(0,0,1)$，$C(0,2,0)$，$D_1(0,0,2)$. 设 $F(t,2,2)$，$t\in[0,2]$，则 $\overrightarrow{CF}=(t,0,2)$，$\overrightarrow{EB}=(2,2,-1)$.

若 $CF\perp EB$，则 $\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{EB}=2t-2=0$，$t=1$，即当 F 为 B_1C_1 的中点时，$CF\perp EB$，故①正确；

因为 $\overrightarrow{D_1F}=(t,2,0)$，$\overrightarrow{EB}=(2,2,-1)$，所以不存在点 F 使得 $D_1F/\!/BE$，故②错误；

当 F 与 B_1 重合时，$\triangle BEF$ 的正视图和侧视图的面积相等，故③正确；

因为点 E 到平面 BFC 的距离为定值，$\triangle BFC$ 的面积也为定值，所以四面体 $EBFC$ 的体积为定值，故④正确.

13.-6　因为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，所以 $1\times3+2x=0$，得 $x=-6$.

14.2　因为 $a_3=S_3-S_2=8=a_1q^2$，$S_2=a_1+a_1q=6$，所以 $\frac{a_1q^2}{a_1+a_1q}=\frac{4}{3}$，

所以 $3q^2-4q-4=0$，得 $q=2$ 或 $-\frac{2}{3}$(舍去)，故 $a_1=2$.

15.$\frac{1}{5}$　作出可行域(图略)，可知点 $(3,1)$ 与点 $(-2,0)$ 连线的斜率最大，故 $z_{\max}=\frac{1-0}{3-(-2)}=\frac{1}{5}$.

16.$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$；6　因为线段 PA 的垂直平分线与直线 PC 相交于点 Q，所以 $|QA|=|PQ|$.

所以$|QA|+|QC|=|PQ|+|QC|=|PC|=4>|AC|$，所以点$Q$的轨迹是以$A$,$C$为焦点，4为长轴长的椭圆，故点$Q$的轨迹方程是$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$. 因为$|QA|+|QC|=4$，$|QC|=4-|QA|$，所以$|MQ|+|QC|=|MQ|-|QA|+4$. 因为$|MQ|-|QA|\leqslant|MA|$，所以$(|MQ|+|QC|)_{\max}=|MA|+4=6$.

17. 解：至少需要3个可测量数据. ………… 2分

选择组合一：①③④或②③④

在$\triangle BCD$中，因为$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$，………… 3分

所以$BC=\sqrt{2}$. ………… 5分

因为$\tan\angle ABC=\tan(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4})=2+\sqrt{3}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，………… 8分

所以$AC=BC\cdot\tan\angle ABC=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$，………… 10分

故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2+\sqrt{3}$. ………… 12分

选择组合二：①②③

在$\triangle BCD$中，因为$BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cdot\cos\angle BDC=2$. ………… 3分

所以$BC=\sqrt{2}$. ………… 4分

结合正弦定理$\frac{BC}{\sin\angle BDC}=\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$. ………… 5分

可求得$\angle BCD=\frac{\pi}{4}$，$\angle CBD=\frac{7\pi}{12}$. ………… 7分

因为$\tan\angle ABC=\tan(\pi-\frac{7\pi}{12})=2+\sqrt{3}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$，………… 9分

所以$AC=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$，………… 11分

故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2+\sqrt{3}$. ………… 12分

选择组合三：①②③

在$\triangle BCD$中，因为$\frac{BD}{\sin\angle BCD}=\frac{CD}{\sin\angle CBD}$. ………… 3分

所以$\sin\angle CBD=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. ………… 4分

因为$\angle CBD$为钝角，所以$\angle CBD=\frac{7\pi}{12}$. ………… 6分

因为$\tan\angle ABC=\tan(\pi-\frac{7\pi}{12})=2+\sqrt{3}$，$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$. ………… 9分

所以$AC=2\sqrt{2}+\sqrt{6}$，………… 11分

故$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=2+\sqrt{3}$. ………… 12分

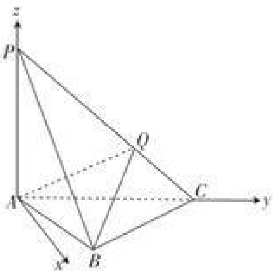
18. (1)证明：因为$PA=AB=AC=2$，$PB=PC=2\sqrt{2}$，所以$PA^2+AB^2=PB^2$，$PA^2+AC^2=PC^2$，所以$PA\perp AB$，$PA\perp AC$. ………… 2分

因为$AB\cap AC=A$，所以$PA\perp$平面ABC. ………… 3分

因为$BC\subset$平面ABC，所以$BC\perp PA$. ………… 4分

(2)解：如图，以A为坐标原点，建立空间直角坐标系$A-xyz$，则$B(\sqrt{3},1,0)$，$C(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$Q(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3})$，所以$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AQ}=(0,\frac{4}{3},\frac{2}{3})$.

………… 6分



取平面CAQ的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(1,0,0)$. ………… 7分

设平面BAQ的法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB}=\sqrt{3}x+y=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AQ}=\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}z=0,\end{cases}$ 令$x=1$，得$\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$，………… 9分

官方微信公众号：zizzsw　咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com　微信客服：zizzs2018

则 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{1+3+12}}=\dfrac{1}{4}$. ………………………………… 10 分

因为二面角 $B-AQ-C$ 为锐角，

所以二面角 $B-AQ-C$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{4}$. ………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 $y=a+\dfrac{b}{x}$，$t=\dfrac{1}{x}$，所以 $y=a+bt$. ………………………………… 1 分

因为 $\bar{y}=\dfrac{910+800+600+440+300+240+210}{7}=500$，………………………………… 2 分

所以 $\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{7}t_iy_i-7\bar{t}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{7}t_i^2-7\bar{t}^2}=\dfrac{1750-7\times0.37\times500}{0.55}=\dfrac{455}{0.55}=\dfrac{9100}{11}$， ………………………………… 3 分

所以 $\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{t}=500-\dfrac{9100}{11}\times0.37=\dfrac{2133}{11}$，………………………………… 4 分

所以 $\hat{y}=\dfrac{2133}{11}+\dfrac{9100}{11}t$，………………………………… 5 分

所以所求回归方程为 $\hat{y}=\dfrac{2133}{11}+\dfrac{9100}{11x}$. ………………………………… 6 分

(2)随机变量 X 的可能取值为 3，4，5，

$P(X=3)=(\dfrac{2}{3})^3+(\dfrac{1}{3})^3=\dfrac{1}{3}$，………………………………… 8 分

$P(X=4)=C_3^2(\dfrac{2}{3})^2\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}+C_3^2(\dfrac{1}{3})^2\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{10}{27}$，………………………………… 9 分

$P(X=5)=C_4^2(\dfrac{2}{3})^2\times(\dfrac{1}{3})^2\times\dfrac{2}{3}+C_4^2(\dfrac{1}{3})^2\times(\dfrac{2}{3})^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{27}$. ………………………………… 10 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	3	4	5
P	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{10}{27}$	$\dfrac{8}{27}$

$EX=3\times\dfrac{1}{3}+4\times\dfrac{10}{27}+5\times\dfrac{8}{27}=\dfrac{107}{27}$. ………………………………… 12 分

20. 解：(1)因为 $f'(x)=(2x-2a)\ln x+x-a=(x-a)(2\ln x+1)$，………………………………… 2 分

所以 $f'(1)=1-a=2$，所以 $a=-1$. ………………………………… 4 分

(2)当 $x\in(0,\sqrt{e})$ 时，$f(x)=(x^2-2ax)\ln x+ax\geqslant0$ 等价于 $(x-2a)\ln x+a\geqslant0$，

即 $(2\ln x-1)a\leqslant x\ln x$. ………………………………… 5 分

因为 $x\in(0,\sqrt{e})$，所以 $2\ln x-1<0$，所以 $a\geqslant\dfrac{x\ln x}{2\ln x-1}$. ………………………………… 7 分

令 $g(x)=\dfrac{x\ln x}{2\ln x-1}$，$x\in(0,\sqrt{e})$，

则 $g'(x)=\dfrac{(\ln x+1)(2\ln x-1)-2\ln x}{(2\ln x-1)^2}=\dfrac{(\ln x-1)(2\ln x+1)}{(2\ln x-1)^2}$. ………………………………… 8 分

令 $g'(x)=0$，得 $x=e^{-\frac{1}{2}}$ 或 e(舍去)，

所以 $g(x)$ 在 $(0,e^{-\frac{1}{2}})$ 上单调递增，在 $(e^{-\frac{1}{2}},\sqrt{e})$ 上单调递减，………………………………… 10 分

所以 $g(x)_{max}=g(e^{-\frac{1}{2}})=\dfrac{e^{-\frac{1}{2}}}{4}=\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$，所以 $a\geqslant\dfrac{1}{4\sqrt{e}}$（或 $a\geqslant\dfrac{\sqrt{e}}{4e}$）. ………………………………… 12 分

21. 解：(1)由抛物线定义知，$|PF|=1+\dfrac{p}{2}=2$，$p=2$，………………………………… 2 分

所以抛物线 C 的方程为 $x^2=4y$，焦点为 $F(0,1)$. ………………………………… 4 分

(2)圆 M 的圆心 $M(0,3)$，半径 $r=2$，

设 $Q(x_1,\dfrac{x_1^2}{4})$，$A(x_2,\dfrac{x_2^2}{4})$，$B(x_3,\dfrac{x_3^2}{4})(x_1\neq x_2\neq x_3)$，………………………………… 5 分

官方微信公众号：zizzsw 咨询热线：010-5601 9830
官方网站：www.zizzs.com 微信客服：zizzs2018

所以直线 QA 的方程为 $y-\frac{x_2^2}{4}=\frac{\frac{x_2^2}{4}-\frac{x_1^2}{4}}{x_2-x_1}(x-x_2)$，即 $(x_1+x_2)x-4y-x_1x_2=0$. ………………………… 6 分

因为直线 QA 与圆 M 相切，所以 $\frac{|x_1x_2+12|}{\sqrt{(x_1+x_2)^2+16}}=2$， ………………………… 7 分

所以 $(x_1^2-4)x_2^2+16x_1x_2+80-4x_1^2=0$，

同理可得 $(x_1^2-4)x_3^2+16x_1x_3+80-4x_1^2=0$. ………………………… 8 分

所以 x_2,x_3 是方程 $(x_1^2-4)x^2+16x_1x+80-4x_1^2=0$ 的两根，

所以 $x_2+x_3=-\frac{16x_1}{x_1^2-4}$，$x_2x_3=\frac{80-4x_1^2}{x_1^2-4}$. ………………………… 9 分

又因为直线 AB 的方程为 $(x_2+x_3)x-4y-x_2x_3=0$， ………………………… 10 分

所以圆 M 的圆心 $M(0,3)$ 到直线 AB 的距离 $d=\frac{|x_2x_3+12|}{\sqrt{(x_2+x_3)^2+16}}=\frac{\left|\frac{80-4x_1^2}{x_1^2-4}+12\right|}{\sqrt{\left(-\frac{16x_1}{x_1^2-4}\right)^2+16}}=\frac{\left|\frac{8x_1^2+32}{x_1^2-4}\right|}{\left|\frac{4(x_1^2+4)}{x_1^2-4}\right|}=2$

$=r$，所以直线 AB 与圆 M 相切. ………………………… 12 分

22. 解：(1)因为曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\sqrt{2}\cos\alpha,\\ y=-1+\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），

所以曲线 C_1 是以 $(1,-1)$ 为圆心，$\sqrt{2}$ 为半径的圆.

所以曲线 C_1 的普通方程为 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$. ………………………… 2 分

因为曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\sin(\frac{\pi}{4}-\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta=1$，

所以曲线 C_2 的直角坐标方程为 $x-y-1=0$. ………………………… 5 分

(2)因为点 $M(1,0)$ 在直线 C_2 上，所以直线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t,\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数），

代入 $(x-1)^2+(y+1)^2=2$，得 $t^2+\sqrt{2}t-1=0$. ………………………… 7 分

设 A,B 所对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=-\sqrt{2}$，$t_1t_2=-1<0$. ………………………… 8 分

所以 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{|MA|+|MB|}{|MA||MB|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1||t_2|}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\frac{\sqrt{2+4}}{1}=\sqrt{6}$，

即 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\sqrt{6}$. ………………………… 10 分

23. 解：(1)因为 $f(x)+f(5-x)\leqslant5$，所以 $|x-4|+|x-1|\leqslant5$.

当 $x<1$ 时，由 $4-x+1-x\leqslant5$，得 $x\geqslant0$，所以 $0\leqslant x<1$； ………………………… 1 分

当 $1\leqslant x\leqslant4$ 时，由 $4-x+x-1\leqslant5$，得 $3\leqslant5$，所以 $1\leqslant x\leqslant4$； ………………………… 2 分

当 $x>4$ 时，由 $x-4+x-1\leqslant5$，得 $x\leqslant5$，所以 $4<x\leqslant5$. ………………………… 3 分

综上所述，所求不等式的解集为 $[0,5]$. ………………………… 5 分

(2)因为 $g(x)=f(x)-f(x+2)=|x-4|-|x-2|\leqslant|(x-4)-(x-2)|=2$，

所以 $g(x)_{\max}=2$，即 $a+b=2$. ………………………… 7 分

因为 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b+4}=\frac{1}{4}(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b+4})(a+1+b+1)$

$=\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}+\frac{b+1}{a+1}+\frac{a+1}{4b+4})\geqslant\frac{1}{4}(1+\frac{1}{4}+2\sqrt{\frac{b+1}{a+1}\cdot\frac{a+1}{4b+4}})=\frac{1}{4}(\frac{5}{4}+1)=\frac{9}{16}$，

当且仅当 $\frac{b+1}{a+1}=\frac{a+1}{4b+4}$，即 $a=\frac{5}{3}$，$b=\frac{1}{3}$ 时等号成立，

所以 $\frac{1}{a+1}+\frac{1}{4b+4}$ 的最小值为 $\frac{9}{16}$. ………………………… 10 分

关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于中国拔尖人才培养的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户（官方网址：www.zizzs.com）、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95%以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承‘’专业、专注、有态度‘’的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+ 大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网 “年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的新高考拔尖人才培养服务平台。

微信搜一搜
自主选拔在线