文科数学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。共4页,总分150分,考试时间120分钟。

第Ⅰ卷(选择题　共60分)

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 若复数z满足$i(1+z)=1-i$,则z在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　B. 第二象限　C. 第三象限　D. 第四象限

2. 已知全集$U=\{1,2,3,4,5,6\}$,$A=\{x\mid x^2-2x-8\leqslant 0,x\in\mathbf{N}^*\}$,则$\complement_U A=$

A. $\{0,5,6\}$　B. $\{-2,-1,0,5,6\}$　C. $\{5,6\}$　D. $\{1,5,6\}$

3. 2022年6月6日是第27个"全国爱眼日",为普及科学用眼知识,提高群众健康水平,预防眼疾,某区残联在残疾人综合服务中心开展"全国爱眼日"有奖答题竞赛活动.已知5位评委老师按百分制(只打整数分)分别给某参赛小队评分,可以判断出一定有评委打满分的是

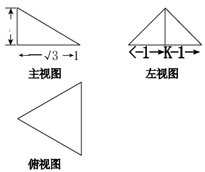
A. 平均数为98,中位数为98　B. 中位数为96,众数为99

C. 中位数为97,极差为9　D. 平均数为98,极差为6

4. 已知平面向量$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$的夹角为$\frac{\pi}{4}$,若$|\boldsymbol{a}|=1$,$|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$,则$|\boldsymbol{b}|$的值为

A. $\sqrt{2}$　B. 5　C. $2\sqrt{2}$　D. $3\sqrt{2}$

5. 如图是某几何体的三视图,则该几何体的表面积为



A. $2+2\sqrt{3}$　B. $4+\sqrt{3}$　C. $2+3\sqrt{3}$　D. $4+3\sqrt{3}$

6. 已知F_1,F_2分别为椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点,过$F_1$的直线与$C$交于$P$,$Q$两点.若$|PF_1|=2|PF_2|=5|F_1Q|$,则$C$的离心率是

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　C. $\frac{\sqrt{5}}{4}$　D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

7. 若数列$\{a_n\}$中不超过$f(m)$的项数恰为$b_m(m\in\mathbf{N}^*)$,则称数列$\{b_m\}$是数列$\{a_n\}$的生成数列,称相应的函数$f(m)$是数列$\{a_n\}$生成$\{b_m\}$的控制函数.已知$a_n=2n$,且$f(m)=m$,数列$\{b_m\}$的前m项和为S_m,若$S_m=30$,则m的值为

A. 9　B. 11　C. 12　D. 14

8. 已知$A(0,2)$,$B(2a,0)$,P是圆$O:x^2+y^2=1$上的动点,若$|PA|=|PB|$,则实数a的取值范围是

A. $(-\sqrt{3},0)\cup(0,\sqrt{3})$　B. $(-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

C. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　D. $[-3,3]$

9. 已知函数$f(x)=\begin{cases}e^x-x+a+5,x\geqslant 0,\\-x^2+2ax,x<0,\end{cases}$若函数$g(x)=f(x)-9$有三个零点,则实数$a$的取值范围是

A. $(-\infty,-3)$　B. $(-\infty,-3]$　C. $(-\infty,-2)$　D. $(-\infty,-2]$

10. 已知函数$f(x+1)$是偶函数,当$1<x_1<x_2$时,$[f(x_1)-f(x_2)](x_1-x_2)>0$恒成立,设$a=f\left(-\frac{1}{2}\right)$,$b=f(2)$,$c=f(3)$,则$a$,$b$,$c$的大小关系为

A. $c<b<a$　B. $b<a<c$　C. $b<c<a$　D. $a<b<c$

11. 已知F是双曲线$E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左焦点,过点$F$且倾斜角为30°的直线与曲线$E$的两条渐近线依次交于$A$,$B$两点,若$A$是线段$FB$的中点,且$C$是线段$AB$的中点,则直线$OC$的斜率为

A. $-\sqrt{3}$　B. $\sqrt{3}$　C. $-3\sqrt{3}$　D. $3\sqrt{3}$

12. 已知$a=\frac{1}{e^{0.1}}-1$,$b=\tan(-0.1)$,$c=\ln 0.9$,其中e为自然对数的底数,则

A. $c>a>b$　B. $a>b>c$　C. $b>a>c$　D. $a>c>b$

第Ⅱ卷(非选择题　共90分)

二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 已知一组数据的样本点(x,y)如下表:

x	-2	-1	0	1	2
y	6.8	5.2	2.8	m	-0.9

由上述样本点得到回归方程$y=-1.94x+3.02$,则$m=$________.

14. 南宋数学家杨辉在《详解九章算法》和《算法通变本末》中,提出了一些新的垛积公式,所讨论的高阶等差数列与一般等差数列不同,前后两项之差并不相等,但是逐项差数之差或者高次差成等差数列.对这类高阶等差数列的研究,在杨辉之后一般称为"垛积术".现有高阶等差数列,其前7项分别为1,7,15,27,45,71,107,则该数列的第8项为________.

15. 已知$\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,$\sin(2\alpha+\beta)=2\sin\beta$,则$\tan\beta$的最大值为________.

16. 已知函数 $f(x)=x^2-ax+2\ln x$（其中 a 为常数）有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，若 $f(x_1)>mx_2$ 恒成立，则实数 m 的取值范围是________.

三、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。

17.（12 分）

设△ABC 的三个内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $\sqrt{3}c^2=\sqrt{3}ac\cdot\cos B+2S_{\triangle ABC}$.

(1)求 A；

(2)若 $a=2$，求 $b+c$ 的取值范围.

18.（12 分）

安全正点、快捷舒适、绿色环保的高速铁路越来越受到中国人民的青睐.为了解动车的终到正点率，某调查中心分别随机调查了甲、乙两家公司生产的动车的 300 个车次的终到正点率，得到下表：

	终到正点率低于 0.95	终到正点率不低于 0.95
甲公司生产的动车	100	200
乙公司生产的动车	110	190

(1)根据上表，分别估计这两家公司生产的动车的终到正点率不低于 0.95 的概率；

(2)能否有 90% 的把握认为甲、乙两家公司生产的动车的终到正点率是否低于 0.95 与生产动车的公司有关？

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

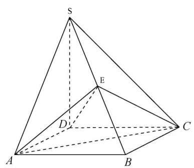
$P(K^2\geqslant k_0)$	0.100	0.050	0.010
k_0	2.706	3.841	6.635

19.（12 分）

如图，四棱锥 S-$ABCD$ 的底面为菱形，$\angle BAD=60°$，$AB=2$，$SD=4$，$SD\perp$ 平面 $ABCD$，点 E 在棱 SB 上.

(1)证明：$AC\perp DE$；

(2)若三棱锥 E-ABC 的体积为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，求点 E 到平面 SAC 的距离.



20.（12 分）

已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 的图象在点 $P(1,2)$ 处的切线斜率为 4，且在 $x=-1$ 处取得极值.

(1)求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若函数 $g(x)=f(x)+m-1$ 有三个零点，求实数 m 的取值范围.

21.（12 分）

已知抛物线 $C:x^2=2py(p>0)$ 的焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 相交于 A,B 两点，PA,PB 是 C 的两条切线，A,B 是切点.当 $AB\parallel x$ 轴时，$|AB|=2$.

(1)求抛物线 C 的方程；

(2)证明：$|PF|^2=|AF|\cdot|FB|$.

(二)选考题：共 10 分。请考生在 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题记分。

22. [选修 4—4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos^2\alpha,\\ y=\sin 2\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

(1)求 C 的极坐标方程；

(2)已知射线 $\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$ 分别与 C 交于点 A,B（异于点 O），C 与极轴交于点 M（异于点 O），求四边形 $OABM$ 的面积.

23. [选修 4—5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+1|+|x-3|$.

(1)求不等式 $f(x)>6$ 的解集；

(2)若 $f(x)$ 的最小值为 m，且正数 a,b,c 满足 $a+b+c=m$，证明：$ab+bc+ca\leqslant\dfrac{16}{3}$.