高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合与常用逻辑用语，不等式，函数与导数，三角函数。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{Q}, x\in\mathbf{N}$，则 $\neg p$ 为

A. $\forall x\notin\mathbf{Q}, x\notin\mathbf{N}$　　B. $\exists x\notin\mathbf{Q}, x\in\mathbf{N}$

C. $\forall x\in\mathbf{Q}, x\notin\mathbf{N}$　　D. $\exists x\in\mathbf{Q}, x\notin\mathbf{N}$

2. 如图所示的时钟显示的时刻为4:30，设半个小时后时针与分针的夹角为 $\alpha(0<\alpha\leqslant\pi)$，则 $\alpha=$

A. $\frac{11\pi}{12}$　　B. $\frac{5\pi}{6}$

C. $\frac{3\pi}{4}$　　D. $\frac{2\pi}{3}$

3. 设全集为 U，A，B 是 U 的子集，有以下四个关系式：

甲：$A\cap B=A$；乙：$\complement_U A\subseteq\complement_U B$；丙：$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U A$；丁：$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

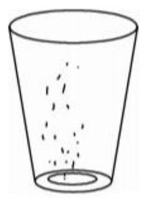
若甲、乙、丙、丁中有且只有一个不成立，则不成立的是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

4. 函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$ 的最小正周期为

A. π　　B. $\frac{3\pi}{2}$　　C. $\frac{\pi}{2}$　　D. $\frac{\pi}{4}$

5. 如图是一个装满水的圆台形容器，若在底部开一个孔，并且任意相等时间间隔内所流出的水体积相等，记容器内水面的高度 h 随时间 t 变化的函数为 $h=f(t)$，定义域为 D，设 $t_0\in D$，$t_0\pm\Delta t\in D$，k_1，k_2 分别表示 $f(t)$ 在区间 $[t_0-\Delta t, t_0]$，$[t_0, t_0+\Delta t](\Delta t>0)$ 上的平均变化率，则



A. $k_1>k_2$　　B. $k_1<k_2$

C. $k_1=k_2$　　D. 无法确定 k_1，k_2 的大小关系

6. 已知 $b>1$，且 $\log_2\sqrt{a}=\log_b 4$，则 2^a+2^b 的最小值为

A. 4　　B. 8　　C. 16　　D. 32

7. 设 $a=\frac{5}{11}$，$b=\ln\frac{21}{11}$，$c=\sin\frac{5}{11}$，则

A. $c<a<b$　　B. $c<b<a$　　C. $a<b<c$　　D. $b<c<a$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\log_2(1-x),-1\leqslant x<k,\\ x^3-3x+1,k\leqslant x\leqslant\sqrt{3}\end{cases}$ 的值域为 A，若 $A\subseteq[-1,1]$，则 $f(x)$ 的零点个数最多是

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知非零实数 a,b 满足 $a>|b|+1$，则下列不等关系一定成立的是

A. $a^2>b^2+1$　　　B. $2^a>2^{b+1}$

C. $a^2>4b$　　　D. $\left|\dfrac{a}{b}\right|>b+1$

10. 下列式子正确的是

A. $\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　　B. $\sin^2\dfrac{\pi}{8}-\cos^2\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

C. $\tan 12^\circ+\tan 33^\circ+\tan 12^\circ\tan 33^\circ=1$　　　D. $2\sqrt{3}\tan 15^\circ+\tan^2 15^\circ=\sqrt{3}$

11. 已知函数 $f(x)=\cos 2x+a\sin x$，则

A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $f(x)$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{2}$ 个单位长度后关于 y 轴对称

C. 当 $a=2$ 时，$f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$

D. 若函数 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上存在零点，则 a 的取值范围是 $(-\infty,1)$

12. 已知直线 $l:y=-x+a$ 与曲线 $C:y=be^{-x}-1$，则

A. 当 $b\leqslant 0$ 时，l 与 C 没有交点　　　B. 当 $b<e^a$ 时，l 与 C 有两个交点

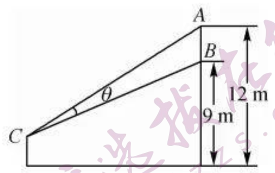
C. 当 $a<\ln b$ 时，l 与 C 没有交点　　　D. 当 $a=\ln b$ 时，l 与 C 有一个交点

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

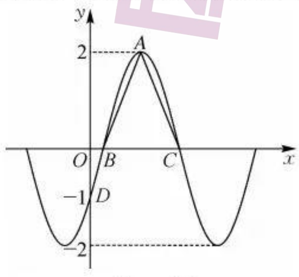
13. 设 $x\in\mathbf{R}$，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则“$[x]\geqslant[y]$”是“$x\geqslant y$”的________条件.（填“充分不必要”“必要不充分”“充要”或“既不充分也不必要”）

14. 已知函数 $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-ax+b)$ 的值域为 $\mathbf{R}$，且在 $(-1,1]$ 上单调递增，请写出一个满足题意的 $f(x)$ 的解析式________.

15. 如图，某商家欲在广场播放露天电影，幕布最高点 A 处离地面 12 m，最低点 B 处离地面 9 m. 胡大爷的眼睛到地面的距离为 170 cm，他带着高 30 cm 的小板凳去观影，由于观影人数众多，胡大爷决定站在板凳上观影，为了获得最佳观影效果（视角 θ 最大），胡大爷离幕布的水平距离应为________.



第 15 题



第 16 题

16. 如图是函数 $f(x)=K\sin(\omega x+\varphi)\left(K>0,\omega>0,-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象，A 是图象的一个最高点，D 是图象与 y 轴的交点，B,C 是图象与 x 轴的交点，且 $D(0,-1)$，$\triangle ABC$ 的面积等于 $\dfrac{\pi}{2}$. 若 $x\in\left(\dfrac{\pi}{12},\pi\right)$ 时，关于 x 的方程 $[f(x)]^2-(m+1)f(x)+m=0$ 恰有 3 个不同的实数根，则 m 的取值范围是________.

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分10分）

已知集合 $A=\left\{x \middle| y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-ax+a}}\right\}$，$B=\left\{x \middle| \dfrac{4}{x-2}\geqslant 1\right\}$.

(1)若 $A=\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围；

(2)若命题 p：“$\exists x\in A, x\in B$”是假命题，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题满分12分）

已知 $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(5\pi+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{1}{3}$.

(1)求 $\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha$ 的值；

(2)若 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$，且 $\cos(\alpha-\beta)=-\dfrac{\sqrt{10}}{10}$，求 β 的值.

19.（本小题满分12分）

设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数，已知 $f(x)=x+f'(0)\cos 2x+a(a\in\mathbf{R})$，且 $f(x)$ 的图象经过点 $(0,2)$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2)求函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调区间.

20.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,且 $f(\lg x)=x+\frac{1}{x}+2$.

(1)判断 $f(x)$的奇偶性及 $f(x)$在$[0,+\infty)$上的单调性,并分别用定义进行证明;

(2)若对 $\forall x\in[-1,1]$,$af(x)\leqslant f(2x)+4a$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

(1)当 $\omega=1$,$\varphi=\frac{\pi}{6}$时,求 $f(x)$的单调递增区间;

(2)设函数 $g(x)=f(x)+\sin\varphi$,若 $x=-\frac{\pi}{8}$是 $g(x)$的零点,直线 $x=\frac{\pi}{8}$是 $g(x)$图象的对称轴,且 $g(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{9}\right)$上无最值,求 ω 的最大值.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x^2+ax+a$.

(1)当 $a=1$ 时,求函数 $g(x)=e^x f(x)$的极值;

(2)若 $f(\ln x)+\frac{2e^2}{x}\geqslant 0$ 恒成立,求实数 a 的取值范围.

高三数学参考答案、提示及评分细则

1. D　因为 p：$\forall x\in\mathbf{Q}$，$x\in\mathbf{N}$，所以 $\neg p$ 为 $\exists x\in\mathbf{Q}$，$x\notin\mathbf{N}$. 故选 D.

2. B　半小时后是 5:00 整，时针指向 5，分针指向 12，$\alpha=\frac{5}{12}\times2\pi=\frac{5\pi}{6}$. 故选 B.

3. B　由题意，甲：$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$；乙：$\complement_U A\subseteq\complement_U B\Leftrightarrow B\subseteq A$；丙：$(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U A\Leftrightarrow\complement_U B\subseteq\complement_U A\Leftrightarrow A\subseteq B$；丁：$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 对任意的集合 A，B 均成立. 若有且只有一个不成立，则必为乙. 故选 B.

4. C　法一：$f(x)=|\sin x|+|\cos x|=\sqrt{(|\sin x|+|\cos x|)^2}=\sqrt{1+|\sin 2x|}=\sqrt{1+\sqrt{\frac{1-\cos 4x}{2}}}$，所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$. 故选 C.

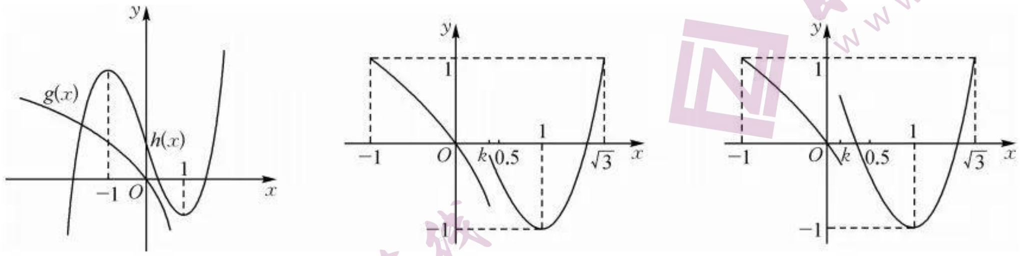
法二：易验证，$\frac{\pi}{2}$ 是函数 $f(x)$ 的周期，$\frac{\pi}{4}$ 不是函数 $f(x)$ 的周期；而 π 是 $\frac{\pi}{2}$ 的 2 倍，$\frac{3\pi}{2}$ 是 $\frac{\pi}{2}$ 的 3 倍. 故选 C.

5. A　由容器的形状可知，在相同的变化时间内，高度的减小量越来越大，且高度 h 的变化率小于 0，所以 $f(t)$ 在区间 $[t_0-\Delta t,t_0]$，$[t_0,t_0+\Delta t](\Delta t>0)$ 上的平均变化率由大变小，即 $k_1>k_2$. 故选 A.

6. D　因为 $\log_2\sqrt{a}=\log_b 4$，所以 $\frac{1}{2}\log_2 a=\log_b 4$，即 $\log_2 a=\frac{2\log_2 4}{\log_2 b}$，所以 $\log_2 a\cdot\log_2 b=4$. 因为 $b>1$，则 $a>1$，所以 $\log_2 a>0$，$\log_2 b>0$. $\log_2(ab)=\log_2 a+\log_2 b\geqslant2\sqrt{\log_2 a\cdot\log_2 b}=4$，则 $ab\geqslant16$，$2^a+2^b\geqslant2\sqrt{2^a\cdot2^b}=2\sqrt{2^{a+b}}\geqslant2\sqrt{2^{2\sqrt{ab}}}\geqslant32$，当且仅当 $a=b=4$ 时，等号均成立. 故选 D.

7. A　当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，易证 $x>\sin x$，可得 $\frac{5}{11}>\sin\frac{5}{11}$，即 $a>c$；$b-a=\ln\frac{21}{11}-\frac{5}{11}=\ln\left(1+2\times\frac{5}{11}\right)-\frac{5}{11}$，设 $f(x)=\ln(1+2x)-x\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$，则 $b-a=f\left(\frac{5}{11}\right)$，因为 $f'(x)=\frac{2}{1+2x}-1=\frac{1-2x}{1+2x}$，当 $0<x<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，所以 $f\left(\frac{5}{11}\right)>f(0)=0$，即 $b>a$，所以 $b>a>c$. 故选 A.

8. C　令 $g(x)=\log_2(1-x)$，则 $g(x)=\log_2(1-x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减；令 $h(x)=x^3-3x+1$，则 $h'(x)=3x^2-3$. 由 $h'(x)>0$，得 $x>1$ 或 $x<-1$；由 $h'(x)<0$，得 $-1<x<1$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,1)$ 上单调递减，于是，$h(x)$ 的极大值为 $h(-1)=3$，极小值为 $h(1)=-1$. 在同一坐标系中作出函数 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的图象，如下图：



显然 $f(-1)=g(-1)=1$；由 $g(x)=-1$，得 $x=\frac{1}{2}$；由 $f(x)$ 的解析式，得 $-1<k\leqslant1$.

(1)若 $-1<k<0$，当 $k\leqslant x<0$ 时，$f(x)>f(0)=1$，不符合题意；

(2)若 $\frac{1}{2}<k\leqslant1$，当 $\frac{1}{2}<x<k$ 时，$f(x)<f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$，不符合题意；

(3)若 $0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$，

①当 $-1\leqslant x<k$ 时，$-1<f(x)\leqslant1$；

②当 $k\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$ 时，$f(1)\leqslant f(x)\leqslant\max\{f(k),f(\sqrt{3})\}\leqslant1$，即 $-1\leqslant f(x)\leqslant1$.

由①②，$0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$ 时符合题意.

此时，结合图象可知，当 $k=0$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,k)$ 上没有零点，在 $[k,\sqrt{3}]$ 上有 2 个零点；当 $0<k\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,k)$ 上有 1 个零点，在 $[k,\sqrt{3}]$ 上有 1 个或 2 个零点，综上，$f(x)$ 最多有 3 个零点. 故选 C.

9. ABC　由于非零实数 a,b 满足 $a>|b|+1$，则 $a^2>(|b|+1)^2$，即 $a^2>b^2+2|b|+1>b^2+1$，则 A 一定成立；因为 $a>|b|+1\geqslant b+1\Rightarrow 2^a>2^{b+1}$，则 B 一定成立；又 $b^2+1\geqslant 2|b|$，所以 $a^2>4|b|\geqslant 4b$，则 C 一定成立；对于 D：令 $a=5,b=3$，满足 $a>|b|+1$，此时 $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{5}{3}<b+1=4$，则 D 不一定成立. 故选 ABC.

10. AC　对于 A，$\sin 15^\circ+\cos 15^\circ=\sqrt{2}\sin(15^\circ+45^\circ)=\sqrt{2}\sin 60^\circ=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，则 A 正确；

对于 B，$\sin^2\frac{\pi}{8}-\cos^2\frac{\pi}{8}=-\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 B 错误；

对于 C，因为 $\tan 45^\circ=\tan(12^\circ+33^\circ)=\frac{\tan 12^\circ+\tan 33^\circ}{1-\tan 12^\circ\tan 33^\circ}=1$，所以 $\tan 12^\circ+\tan 33^\circ+\tan 12^\circ\tan 33^\circ=1$，则 C 正确；

对于 D，法一：因为 $\tan 15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan 60^\circ-\tan 45^\circ}{1+\tan 60^\circ\tan 45^\circ}=2-\sqrt{3}$，所以 $2\sqrt{3}\tan 15^\circ+\tan^2 15^\circ=2\sqrt{3}(2-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})^2=1$，则 D 错误.

法二：因为 $\tan 30^\circ=\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以 $2\sqrt{3}\tan 15^\circ=1-\tan^2 15^\circ$，所以 $2\sqrt{3}\tan 15^\circ+\tan^2 15^\circ=1$，则 D 错误. 故选 AC.

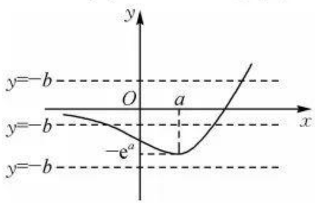
11. BD　因为 $f(x+\pi)=\cos 2(x+\pi)+a\sin(x+\pi)=\cos 2x-a\sin x$，所以 $a\neq 0$ 时，$f(x+\pi)\neq f(x)$，则 A 错误；

对于 B，法一：因为 $f(\pi-x)=\cos 2(\pi-x)+a\sin(\pi-x)=\cos 2x+a\sin x=f(x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{2}$ 对称，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后关于 y 轴对称，则 B 正确；法二：$f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度后对应的函数为 $f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x+a\cos x$ 是偶函数，则其图象关于 y 轴对称，则 B 正确；

对于 C，法一：当 $a=2$ 时，$f(x)=-2\sin^2 x+2\sin x+1$，设 $t=\sin x$，$t\in[-1,1]$，又函数 $y=-2t^2+2t+1$ 在 $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，由复合函数的单调性可知，当 $t=\sin x\leqslant\frac{1}{2}$，且 $t=\sin x$ 单调递增时，$f(x)$ 单调递增，此时 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$；当 $t=\sin x\geqslant\frac{1}{2}$，且 $t=\sin x$ 单调递减时，$f(x)$ 单调递增，此时 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 和 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，则 C 错误；法二：当 $a=2$ 时，$f'(x)=-4\sin x\cos x+2\cos x=-4\cos x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)$，由 $f'(x)\geqslant 0$，得 $\begin{cases}\cos x\geqslant 0,\\ \sin x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\cos x\leqslant 0,\\ \sin x\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ 内求得 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{6}$，或 $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{5\pi}{6}$，所以 $f(x)$ 的递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 和 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$，则 C 错误；

对于 D，设 $t=\sin x$，则 $f(x)=\cos 2x+a\sin x=-2t^2+at+1$，当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$t\in(0,1)$，又 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在零点，于是方程 $-2t^2+at+1=0$ 在 $(0,1)$ 上有解，即 $a=2t-\frac{1}{t}$ 在 $(0,1)$ 上有解. 易知 $y=2t-\frac{1}{t}$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以 $a\in(-\infty,1)$，则 D 正确. 故选 BD.

12. CD　由 $\begin{cases}y=-x+a,\\ y=be^{-x}-1,\end{cases}$ 得 $be^{-x}-1=-x+a$，即 $(x-a-1)e^x=-b$. 设 $f(x)=(x-a-1)e^x(x\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=(x-a)e^x$. 当 $x<a$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>a$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上为减函数；在 $(a,+\infty)$ 上为增函数. 从而 $f(x)_{\min}=f(a)=-e^a$. 当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to 0$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$. 如图，

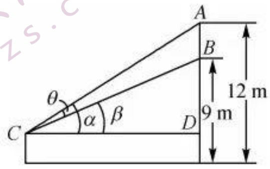


当$-b\geqslant 0$,即$b\leqslant 0$时,l与C只有一个交点,则A错误;当$-e^a<-b<0$,即$0<b<e^a$时,l与C有两个交点,则B错误;当$-b<-e^a$,即$b>e^a$,即$a<\ln b$时,l与C没有交点,则C正确;当$-b=-e^a$,即$a=\ln b$时,l与C有一个交点,则D正确.故选CD.

13.必要不充分　$[x]\geqslant[y]$,即$[x]>[y]$或$[x]=[y]$,当$[x]>[y]$时,可推出$x>y$;但当$[x]=[y]$时,如$x=2.1$,$y=2.3$,此时$x<y$,所以“$[x]\geqslant[y]$”不能推出“$x\geqslant y$”,即充分性不成立.当$x\geqslant y$时,即$x>y$或$x=y$,当$x=y$时,必有$[x]=[y]$;当$x>y$时,可推出$[x]>[y]$或$[x]=[y]$,所以“$x\geqslant y$”能推出“$[x]\geqslant[y]$”,即必要性成立.所以“$[x]\geqslant[y]$”是“$x\geqslant y$”的必要不充分条件.

14.$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+4)$(答案不唯一)　由题意,得$\begin{cases}\Delta=a^2-4b\geqslant 0,\\ \dfrac{a}{2}\geqslant 1,\\ 1^2-a\times 1+b>0,\end{cases}$即$\begin{cases}a^2\geqslant 4b,\\ a\geqslant 2,\\ 1-a+b>0,\end{cases}$可取$a=4$,$b=4$,得$f(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+4)$(答案不唯一).

15.$\sqrt{70}$ m　过点C作$CD\perp AB$于D,



设$\angle ACD=\alpha$,$\angle BCD=\beta$,$CD=x(x>0)$,则$\theta=\alpha-\beta$,胡大爷站在板凳上眼睛到地面的距离为2 m.

在Rt$\triangle ACD$和Rt$\triangle BCD$中,$\tan\alpha=\dfrac{10}{x}$,$\tan\beta=\dfrac{7}{x}$,则$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{10}{x}-\frac{7}{x}}{1+\frac{10}{x}\cdot\frac{7}{x}}=\dfrac{3}{x+\frac{70}{x}}\leqslant\dfrac{3}{2\sqrt{x\cdot\frac{70}{x}}}=\dfrac{3\sqrt{70}}{140}$(当且仅当$x=\sqrt{70}$时等号成立),又$\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,则当$x=\sqrt{70}$ m时,视角θ最大.即胡大爷离幕布的水平距离为$\sqrt{70}$ m时,观影效果最佳.

16.$[-1,0]\cup\{-2,2\}$　由题意可得$K=2$,$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|BC|\cdot y_A=\dfrac{1}{2}|BC|\cdot 2=\dfrac{\pi}{2}$,设$f(x)$的最小正周期为$T$,则$\dfrac{T}{2}=\dfrac{2\pi}{2\omega}=|BC|=\dfrac{\pi}{2}$,即$\omega=2$.所以$f(x)=2\sin(2x+\varphi)$,又图象过点$D(0,-1)$,则$f(0)=2\sin\varphi=-1$,又因为$-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$,所以$\varphi=-\dfrac{\pi}{6}$,所以$f(x)=2\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$,当$x\in\left(\dfrac{\pi}{12},\pi\right)$时,$2x-\dfrac{\pi}{6}\in\left(0,\dfrac{11\pi}{6}\right)$,$f(x)$在$\left(\dfrac{\pi}{12},\pi\right)$上先增后减再增,且$f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=0$,$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2$,$f(\pi)=-1$,由$[f(x)]^2-(m+1)f(x)+m=0$,解得$f(x)=1$或$m$.因为$f(x)=1$在$\left(\dfrac{\pi}{12},\pi\right)$上有2个不同的实数根,所以$f(x)=m$需要有1个实数根,此时$-1\leqslant m\leqslant 0$,或$m=\pm 2$,故$m$的取值范围为$[-1,0]\cup\{-2,2\}$.

17.解:(1)因为$A=\mathbf{R}$,所以$x^2-ax+a>0$恒成立.

所以$\Delta<0$,即$a^2-4a<0$,解得$0<a<4$,故实数a的取值范围为$(0,4)$. ………………………… 4分

(2)因为p:“$\exists x\in A$,$x\in B$”是假命题,

所以$A\cap B=\varnothing$. ………………………………………………………… 6分

又$B=\left\{x\left|\dfrac{4}{x-2}\geqslant 1\right.\right\}=\{x|2<x\leqslant 6\}$,$A=\{x|x^2-ax+a>0\}$,

结合二次函数 $y=x^2-ax+a$ 的图象，可得 $\begin{cases}4-2a+a\leqslant 0,\\36-6a+a\leqslant 0.\end{cases}$ 解得 $a\geqslant\frac{36}{5}$. …… 9分

故实数 a 的取值范围为 $\left[\frac{36}{5},+\infty\right)$. …… 10分

18. 解：(1) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(5\pi+\alpha)+\cos(\pi-\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{-\sin\alpha-\cos\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{-\tan\alpha-1}=\dfrac{1}{3}$, …… 2分

解得 $\tan\alpha=2$, …… 3分

所以 $\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{1-\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{1-2}{4+1}=-\dfrac{1}{5}$. …… 6分

(2) 由(1)知 $\tan\alpha=2$，又因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，所以 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$； …… 8分

因为 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\alpha-\beta\in(0,\pi)$，

又 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{\sqrt{10}}{10}$，所以 $\sin(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha-\beta)}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$， …… 10分

于是 $\cos\beta=\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]=\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)+\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{5}}{5}\times\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)+\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， …… 11分

又 $\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，所以 $\beta=-\frac{\pi}{4}$. …… 12分

19. 解：(1) $f(x)=x+f'(0)\cos 2x+a\ (a\in\mathbf{R})$，则 $f'(x)=1-2f'(0)\sin 2x$，得 $f'(0)=1$. …… 4分

由题意 $f(0)=2$，可得曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-2=x$，即 $x-y+2=0$. …… 6分

(2) 由已知得 $f(0)=f'(0)+a=2$.

又由(1)知 $f'(0)=1$，所以 $a=1$.

故 $f(x)=x+\cos 2x+1$. …… 8分

$f'(x)=1-2\sin 2x$，$x\in[0,\pi]$，

由 $f'(x)>0$，得 $0\leqslant x<\frac{\pi}{12}$，或 $\frac{5\pi}{12}<x\leqslant\pi$；由 $f'(x)<0$，得 $\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$. …… 11分

故 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的单调递增区间为 $\left[0,\frac{\pi}{12}\right)$ 和 $\left(\frac{5\pi}{12},\pi\right]$；单调递减区间为 $\left(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right)$. …… 12分

注：考生的答案为闭区间时也正确.

20. 解：(1) 令 $t=\lg x$，则 $x=10^t$. 由题意 $f(t)=10^t+10^{-t}+2$，即 $f(x)=10^x+10^{-x}+2$. …… 1分

$f(x)$ 为偶函数，证明如下： …… 2分

函数 $f(x)=10^x+10^{-x}+2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

因为 $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $-x\in\mathbf{R}$，且 $f(-x)=10^{-x}+10^x+2=f(x)$，

所以函数 $f(x)=10^x+10^{-x}+2$ 为偶函数. …… 3分

$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，证明如下： …… 4分

$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，有

$f(x_2)-f(x_1)=10^{x_2}+10^{-x_2}+2-(10^{x_1}+10^{-x_1}+2)=\dfrac{(10^{x_2}-10^{x_1})(10^{x_1+x_2}-1)}{10^{x_1+x_2}}$，

由 $x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，得 $10^{x_2}-10^{x_1}>0$，$10^{x_1+x_2}-1>0$.

于是 $f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$.

所以函数 $f(x)=10^x+10^{-x}+2$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增. …… 6分

(2) 令 $t=10^x+10^{-x}$，$x\in[-1,1]$，由(1)得 $t\in\left[2,\frac{101}{10}\right]$. …… 7分

由 $af(x)\leqslant f(2x)+4a$，得 $a(10^x+10^{-x}+2)\leqslant 10^{2x}+10^{-2x}+2+4a$，即 $a(t+2)\leqslant t^2+4a$，

整理，得 $a(t-2)\leqslant t^2$ 对 $\forall t\in\left[2,\frac{101}{10}\right]$ 恒成立，

当 $t=2$ 时，$0\leqslant 4$，此时 $a\in\mathbf{R}$； …… 9分

当 $2<t\leqslant\frac{101}{10}$ 时，$a\leqslant\dfrac{t^2}{t-2}=\dfrac{(t-2)^2+4(t-2)+4}{t-2}=t-2+\dfrac{4}{t-2}+4$.

因为 $t-2+\frac{4}{t-2}\geqslant 2\sqrt{(t-2)\cdot\frac{4}{t-2}}=4$(当且仅当 $t=4$ 时等号成立)，所以 $a\leqslant 8$. ………… 11 分

综上，实数 a 的取值范围为 $(-\infty,8]$. ………… 12 分

21. 解：(1) $f(x)=2\sin x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$$=2\sin x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}$$

$$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2},$$ ………… 2 分

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，

解得 $k\pi-\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，

故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}\right](k\in\mathbf{Z})$. ………… 4 分

(2) $f(x)=2\sin\omega x\cos(\omega x+\varphi)=2\sin\omega x(\cos\omega x\cos\varphi-\sin\omega x\sin\varphi)=2\sin\omega x\cos\omega x\cos\varphi-2\sin^2\omega x\sin\varphi$

$=\sin 2\omega x\cos\varphi-(1-\cos 2\omega x)\sin\varphi$

$=\sin(2\omega x+\varphi)-\sin\varphi$， ………… 6 分

由题意，得 $g(x)=\sin(2\omega x+\varphi)$，

因为 $x=-\frac{\pi}{8}$ 为 $g(x)$ 的零点，直线 $x=\frac{\pi}{8}$ 为 $g(x)$ 图象的对称轴，

所以 $-\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_1\pi$ ①，$\frac{\pi}{4}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2}$ ②，$k_1,k_2\in\mathbf{Z}$， ………… 7 分

②－①，得 $\frac{\pi}{2}\omega=(k_2-k_1)\pi+\frac{\pi}{2}$，所以 $\omega=2(k_2-k_1)+1$，

因为 $k_1,k_2\in\mathbf{Z}$，$\omega>0$，所以 $\omega=2n+1(n\in\mathbf{N})$，从而 ω 为正奇数， ………… 8 分

因为 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{9}\right)$ 上无最值，则 $\frac{\pi}{9}-\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{18}\leqslant\frac{T}{2}$，这里 T 为 $g(x)$ 的最小正周期，

即 $\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{4\omega}\geqslant\frac{\pi}{18}$，解得 $\omega\leqslant 9$. ………… 9 分

当 $\omega=9$ 时，$-\frac{9\pi}{4}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$，此时 $g(x)=\sin\left(18x+\frac{\pi}{4}\right)$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{9}\right)$ 时，$18x+\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{5\pi}{4},\frac{9\pi}{4}\right)$，

所以当 $18x+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{72}$ 时，$g(x)$ 取得最小值，不满足题意； ………… 10 分

当 $\omega=7$ 时，$-\frac{7\pi}{4}+\varphi=k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

因为 $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$，此时 $g(x)=\sin\left(14x-\frac{\pi}{4}\right)$，

当 $x\in\left(\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{9}\right)$ 时，$14x-\frac{\pi}{4}\in\left(\frac{19\pi}{36},\frac{47\pi}{36}\right)\subseteq\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$，

此时 $g(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{18},\frac{\pi}{9}\right)$ 上无最值，符合题意. ………… 11 分

故 ω 的最大值为 7. ………… 12 分

22. 解：(1) 当 $a=1$ 时，$g(x)=e^xf(x)=e^x(x^2+x+1)$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$g'(x)=e^x(x^2+3x+2)$， ………… 1 分

令 $g'(x)=0$，得 $x=-2$，或 $x=-1$. ………… 2 分

当 x 变化时，$g(x)$，$g'(x)$ 的变化情况如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	单调递增	$\frac{3}{e^2}$	单调递减	$\frac{1}{e}$	单调递增

因此当 $x=-2$ 时，$g(x)$ 有极大值，并且极大值为 $\frac{3}{e^2}$；

当 $x=-1$ 时，$g(x)$ 有极小值，并且极小值为 $\frac{1}{e}$. ………………………………………… 4 分

(2) $f(\ln x)+\frac{2e^2}{x}\geqslant 0$ 等价于 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]\geqslant -2e^2$.（★）

令 $h(x)=x[(\ln x)^2+a\ln x+a]$，$x\in(0,+\infty)$，则 $h'(x)=(\ln x)^2+a\ln x+a+x\left(\frac{2\ln x}{x}+\frac{a}{x}\right)=$ $(\ln x+2)(\ln x+a)$，………………………………………… 5 分

（ⅰ）若 $a\in[0,4]$，对于不等式 $(\ln x)^2+a\ln x+a\geqslant 0$，则有 $\Delta=a^2-4a\leqslant 0$，

故当 $a\in[0,4]$ 时，不等式(★)恒成立. ………………………………………… 6 分

（ⅱ）若 $a\in(4,+\infty)$，

当 $x\in(0,e^{-a}]$ 时，$(\ln x)^2+a\ln x+a=\ln x(\ln x+a)+a>0$，所以 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]>0$，故不等式(★)恒成立；

现探究当 $x\in(e^{-a},+\infty)$ 时的情况：

当 $x\in(e^{-a},e^{-2})$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 (e^{-a},e^{-2}) 上单调递减，在 $(e^{-2},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=e^{-2}$ 是 $h(x)$ 的极小值点.

要使不等式(★)成立，只需 $h(e^{-2})=e^{-2}(4-2a+a)\geqslant -2e^2$，解得 $a\leqslant 4+2e^4$.

故当 $4<a\leqslant 4+2e^4$ 时，不等式(★)恒成立. ………………………………………… 9 分

（ⅲ）若 $a\in(-\infty,0)$，

当 $x\in(0,e^{-2}]$ 时，$(\ln x)^2+a\ln x+a=(\ln x)^2+a(\ln x+1)>0$，所以 $x[(\ln x)^2+a\ln x+a]>0$，故不等式(★)恒成立；

现探究当 $x\in(e^{-2},+\infty)$ 时的情况：

当 $x\in(e^{-2},e^{-a})$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in(e^{-a},+\infty)$ 时，$h'(x)>0$，

所以 $h(x)$ 在 (e^{-2},e^{-a}) 上单调递减，在 $(e^{-a},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=e^{-a}$ 是 $h(x)$ 的极小值点.

要使不等式(★)成立，只需 $h(e^{-a})=e^{-a}(a^2-a^2+a)\geqslant -2e^2$，

即 $ae^{-a}\geqslant -2e^2$.（☆）

设 $m(x)=\frac{x}{e^x}(x<0)$，则(☆)化为 $m(a)\geqslant m(-2)$.

因为 $m'(x)=\frac{1-x}{e^x}>0$，所以 $m(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，

于是，由 $m(a)\geqslant m(-2)$ 及 $a<0$，得 $-2\leqslant a<0$.

故当 $-2\leqslant a<0$ 时，不等式(★)恒成立. ………………………………………… 11 分

综上，实数 a 的取值范围为 $[-2,4+2e^4]$. ………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。