

大庆实验中学实验一部 2020 级高三得分训练一

数学试题

一、单选题

- 已知集合 $A = \{1, 2, 4\}$, 集合 $B = \{x | 3 - x < 1\}$, 则 $A \cap B =$

A. $\{1, 4\}$ B. $\{2, 4\}$ C. $\{1, 2\}$ D. $\{4\}$
- 在复平面内, 复数 $\frac{2-i}{1+i}$ (i 是虚数单位) 的共轭复数对应的点位于

A. 第四象限 B. 第三象限 C. 第二象限 D. 第一象限
- 唐诗是中华民族珍贵的文化遗产之一, 是中华文化宝库中的一颗明珠, 开阔而立体的空间是唐诗中经常出现的意境, “诗圣”杜甫就在《旅夜书怀》中描绘了“星垂平野阔, 月涌大江流”这样富有空间感的旅途景色, 其中“月涌”更是描绘了月亮的影子倒映在水中的场景。若将站在船上的杜甫近似为不动, 水面近似为平面, 月亮在空中近似沿平行于水面的直线移动, 在月亮移动时, 杜甫看到的月亮在水面的倒影如何变化

A. 沿圆弧移动 B. 沿直线移动 C. 沿抛物线移动 D. 不动
- 从 1、2、3、4、5 中任选 2 个不同数字组成一个两位数, 则该数能被 3 整除的概率为

A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{10}$ D. $\frac{1}{5}$
- 设 M 为 $\triangle ABC$ 所在平面内一点, $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, 则 $\triangle BCM$ 与 $\triangle ABC$ 面积比值为

A. $\frac{5}{6}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
- 将函数 $f(x) = \frac{1}{8}\cos 4x$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度, 得到 $h(x)$ 的图象, 若对于任意的实数 $x \in \left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right]$, $h(\omega x)$ 都单调递增, 则正数 ω 的最大值为

A. 3 B. $\frac{5}{2}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{7}{6}$

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 + \ln x, & x \geq 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}, & x < 1 \end{cases}$, 若实数 x_1, x_2 满足 $x_1 \neq x_2$, $f(x_1) + f(x_2) = 4$, 则 $x_1 + x_2$

的最小值为

- A. 2 B. 3 C. $3 - 2\ln 2$ D. $3 + 2\ln 2$

8. 有一个正四面体 $P-ABC$, 内部放入 20 个完全相同的小球 (完全放入), 小球的半径最大为 $\sqrt{6}$, 求正四面体 $P-ABC$ 的棱长

- A. $8 + 4\sqrt{6}$ B. $4 + 2\sqrt{6}$ C. $12 + 6\sqrt{6}$ D. $16 + 8\sqrt{6}$

二、多选题

9. 已知曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{m+1} + \frac{y^2}{3-m} = 1 (m \in \mathbb{R})$, 则

- A. 当 $m=1$ 时, 曲线 C 为圆
B. 当 $m=5$ 时, 曲线 C 为双曲线, 其渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}x$
C. 当 $m > 1$ 时, 曲线 C 为焦点在 x 轴上的椭圆
D. 不存在实数 m 使得曲线 C 为双曲线, 其离心率为 $\sqrt{2}$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 1 \\ \frac{e^x}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$ 下列选项正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 只有一个零点
B. $\exists x_1 \in (0, 1), \exists x_2 \in (1, 3)$, 使 $f(x_1) > f(x_2)$
C. 函数 $f(x)$ 的值域为 $[-e^{-1}, +\infty)$
D. 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - 2af(x) = 0$ 有两个不相等的实数根, 则实数 a 的取值范围是 $(0, +\infty)$

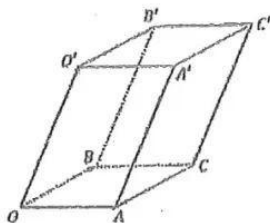
11. 不共线的向量 a, b 的夹角为 θ , 定义 $a \times b$ 为一个向量, 模长 $|a \times b| = |a| \cdot |b| \sin \theta$, 方向与向量 a, b 都垂直, 在平行六面体 $ABCO-A'B'C'O'$ 中, 下列结论正确的是

A. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}|$

B. 若 $\angle AOB \neq \frac{\pi}{2}$, 则 $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \tan \angle AOB$

C. $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 2, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2$, 则 $|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}| = \sqrt{3}$

D. 平行六面体 $ABCO-A'B'C'O'$ 的体积为 $|\overrightarrow{OO'} \cdot (\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB})|$



12. 德国数学家黎曼 (Riemann) 提出的黎曼函数 $R(x)$ 在分析学中有着广泛的应

用. 黎曼函数 $r(x)$ 的定义为 $R(x) = \begin{cases} 1, & x=0, 1 \\ \frac{1}{p}, & x = \frac{q}{p} \\ 0, & x \text{ 为无理数} \end{cases}$, ($p \in \mathbb{N}^*, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ 且 p, q 互

质), 互质整数是公约数只有 1 的两个整数. 下列命题中, 正确的有

A. 存在常数 $T > 0$, 使得对任意的 $x \in \mathbb{R}$, 都有 $r(x+T) = r(x)$

B. 若 $a, b \in [0, 1]$, 则 $R(a \cdot b) \geq R(a) \cdot R(b)$

C. 存在大于 1 的实数 m , 使方程 $R(x) = \frac{m}{m+1}$ ($x \in [0, 1]$) 有实数根

D. n, t 为正整数, t 为质数, $S = \left\{ x \in [n, n+1] \mid r(x) = \frac{1}{t} \right\}$, 则 S 有 $t-1$ 个元素

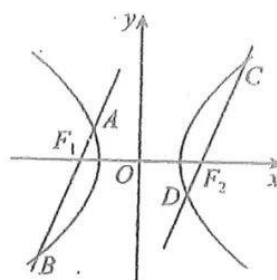
三、填空题

13. 已知 $(2-x)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$, 则 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 =$ _____. (用数字作答)

14. 若直线 $y = kx$ 与曲线 $y = x + e^{-x}$ 相切, 则 $k =$ _____.

15. 已知点 $A(-2, -1), B(2, -1)$, 圆 $(x-a)^2 + (y-2a+4)^2 = 1$ 上存在点 M 满足 $MA \perp MB$, 则实数 a 的取值范围是 _____.

16. 如图, 过双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的左、右焦点作两条相互平行的弦 AB, CD , 其中 A, B 在双曲线的左支上, A, C 在 x 轴上方, 则 $|AF_1| \cdot |CF_2|$ 的最小值为 _____, 令 $\angle AF_1F_2 = \theta$, $\theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 时,



四边形 AF_1F_2C 面积的取值范围为 _____.

四、解答题

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n+1}}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

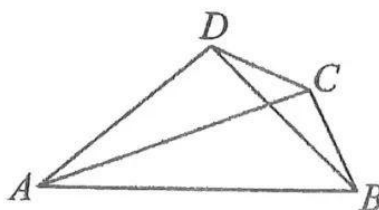
(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \log_2 a_n^2 + 3n$, 数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n , 求证: $S_n < \frac{3}{4}$.

18. 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AC = \sqrt{7}$, $AB = 3$, $\angle DAC = \angle BAC$, $\sin \angle BAC = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

(1) 求边 BC ;

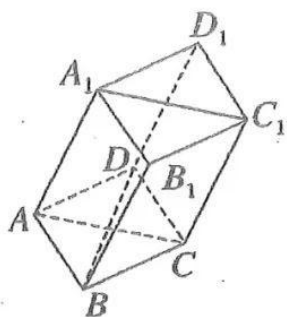
(2) 若 $\angle CDA = \frac{2\pi}{3}$, 求四边形 $ABCD$ 的面积.



19. 如图, 棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的所有棱长都等于 2, $\angle ABC$ 和 $\angle A_1AC$ 均为 60° , 平面 $AA_1C_1C \perp$ 平面 $ABCD$.

(1) 在直线 CC_1 上是否存在点 P , 使 $BP \parallel$ 平面 DA_1C_1 ? 若存在, 求出点 P 的位置, 若不存在, 请说明理由.

(2) 求平面 DA_1C_1 和平面 PA_1C_1 的夹角.



20. 为了有针对性地提高学生体育锻炼的积极性, 某中学需要了解性别因素是否对学生体育锻炼的经常性有影响, 为此随机抽查了男女生各 100 名, 得到如下数据:

(1) 依据 $\alpha=0.01$ 的独立性检验, 能否认为性别因素与学生体育锻炼的经常性有关系;

(2) 为了提高学生体育锻炼的积极性, 集团设置了“学习女排精神, 塑造健康体魄”的主题活动, 在该活动的某次排球训练课上, 甲乙丙三人相互做传球训练, 第 1

次由甲将球传出, 每次传球时, 传球者都等可能地将球传给另外两个人中的任何一人. 求第 n 次传球后球在甲手中的概率.

性别	锻炼	
	不经常	经常
女生	40	60
男生	20	80

附:

α	0.010	0.005	0.001
χ_α	6.635	7.879	10.828

$$\chi^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

21. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 作 x 轴的垂线交 C 于点 P , $|PF_1| = \frac{7}{2}$, $|PF_2| = \frac{1}{2}$, M, N 为椭圆的左右顶点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 设过点 $G(1, 0)$ 的动直线 l 交椭圆 C 于 A, B 两点 (A 在第一象限, B 在第四象限), 若直线 AM, BN 的斜率分别为 k_{AM}, k_{BN} .

(i) 试探究 k_{AM} 与 k_{BN} 的比值 $\frac{k_{AM}}{k_{BN}}$ 是否为定值. 若是定值, 求出这个定值; 若不是定值, 请说明理由;

(ii) 求 $k_{AM}^2 - \frac{1}{3}k_{BN}^2$ 的取值范围.

22. 已知函数 $f(x) = ax + (a+1)\ln x - \frac{1}{x}$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 当 $a = 0$ 时, $g(x) = x(1 - f(x)) = t$ 有两个不相等的实根 x_1, x_2 , 证明

$$\left| \frac{x_1 - x_2}{x_1 + x_2} \right| > \frac{2}{e} \sqrt{2 - t}.$$

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

