

恩施州高中教育联盟 2023 年春季学期高二年级期末考试 数学参考答案

一、单选题

1~8 CABBCCBA

7. B

椭圆 C 的蒙日圆的半径为 $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+12}$.

因为 $MP \perp MQ$, 所以 PQ 为蒙日圆的直径,

所以 $|PQ|=2\sqrt{a^2+12}$, 所以 $|MP|^2+|MQ|^2=|PQ|^2=4(a^2+12)$.

因为 $|MP| \cdot |MQ| \leq \frac{|MP|^2+|MQ|^2}{2}=2(a^2+12)$, 当 $|MP|=|MQ|=\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2+12}$ 时, 等

号成立, 所以 $\triangle MPQ$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}|MP| \cdot |MQ|=a^2+12$.

由 $\triangle MPQ$ 面积的最大值为 28, 得 $a^2+12=28$, 得 $a=4$, 故椭圆 C 的长轴长为 8. 故选 B.

8. A

由函数 $f(x)=4\ln x+1$, 可得 $f'(x)=\frac{4}{x}$,

因为 $a>0$, 设切点为 $(t, 4\ln t+1)$, 则 $f'(t)=\frac{4}{t}$,

则公切线方程为 $y-4\ln t-1=\frac{4}{t}(x-t)$, 即 $y=\frac{4}{t}x+4\ln t-3$,

与 $y=\frac{1}{a}x^2-2x$ 联立可得 $\frac{1}{a}x^2-(2+\frac{4}{t})x-4\ln t+3=0$,

所以 $\Delta=(2+\frac{4}{t})^2-4 \times \frac{1}{a} \times (3-4\ln t)=0$, 整理可得 $\frac{1}{a}=\frac{(\frac{2}{t}+1)^2}{3-4\ln t}$,

又由 $\begin{cases} a>0, \\ t>0, \end{cases}$ 可得 $3-4\ln t>0$, 解得 $0<t<e^{\frac{3}{4}}$.

令 $h(t)=\frac{(\frac{2}{t}+1)^2}{3-4\ln t}$, 其中 $0<t<e^{\frac{3}{4}}$, 可得 $h'(t)=\frac{\frac{4}{t}(\frac{2}{t}+1) \cdot \frac{t+4\ln t-1}{t}}{(3-4\ln t)^2}$.

令 $\varphi(t)=t+4\ln t-1$, 可得 $\varphi'(t)=1+\frac{4}{t}>0$, 则函数 $\varphi(t)$ 在 $(0, e^{\frac{3}{4}})$ 上单调递增, 且 $\varphi(1)=0$.

当 $0<t<1$ 时, $\varphi(t)<0$, 即 $h'(t)<0$, 此时函数 $h(t)$ 单调递减,

当 $1<t<e^{\frac{3}{4}}$ 时, $\varphi(t)>0$, 即 $h'(t)>0$, 此时函数 $h(t)$ 单调递增,

所以 $h(t)_{\min}=h(1)=3$, 且当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $h(t) \rightarrow +\infty$, 所以函数 $h(t)$ 的值域为 $[3, +\infty)$, 所以 $\frac{1}{a}$

≥ 3 且 $a>0$, 解得 $0<a \leq \frac{1}{3}$, 即实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{3}]$. 故选 A.

【高二数学·参考答案 第 1 页(共 8 页)】

• 23-574B •



二、多选题

9. AC

对于 A, 高一(2)班德智体美劳各项得分依次为 9.5, 9.9, 9.5, 9.9, 8.5,

所以极差为 $9.5 - 8.5 = 1$, A 正确;

对于 B, 两班的德育分相等, B 错误;

对于 C, 高一(1)班评价得分的平均数为 $\frac{9.5 + 9.25 + 9.5 + 9 + 9.5}{5} = 9.35$,

(2)班评价得分的平均数为 $\frac{9.5 + 8.5 + 9 + 9.5 + 9}{5} = 9.1$, 故 C 正确;

对于 D, 两班的体育分相差 $9.5 - 9 = 0.5$,

而两班的劳育分相差 $9.25 - 8.5 = 0.75$, D 错误. 故选 AC.

10. CD

11. BCD

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = a + \frac{1}{x}$, 在同一坐标系中作出 $y = e^x$ 与 $y = \frac{1}{x}$ 的图像,

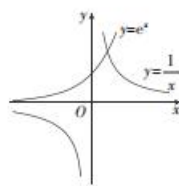
可观察出

当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个零点,

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有一个零点,

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 有两个零点,

函数 $f(x)$ 必有一个零点是正数, B, C, D 选项错误. 故选 BCD.



12. ABC

对于选项 AB, 对于在 $\mathbf{R}^+$ 上单调递增的函数 $f(x)$, $f(x)$ 具有“性质 P”等价于对任意满足 0

$< a \leq b < c$ 且 $a + b > c$ 的实数 a, b, c , 均有 $f(a) + f(b) > f(c)$,

而 $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b} > \sqrt{c}$, 因此 $f(x) = \sqrt{x}$ 具有“性质 P”.

取 $(a, b, c) = (2, 3, 4)$, 则 $a^2 + b^2 = 13 < c^2$, 于是 $f(x) = x^2$ 不具有“性质 P”.

对于选项 C, 显然 $M > 1$.

当 $a + b > c$ 且 $a, b, c \geq 2$ 时, 有 $(a-1)(b-1) \geq 1$ 知 $ab \geq a + b$,

从而有 $\ln a + \ln b = \ln(ab) \geq \ln(a + b) > \ln c$.

而当 $1 < M < 2$ 时, 取 $a = b = M$ 且 $c = M^2$, 则 $\ln a + \ln b = \ln c$, 不符合题意.

因此 M 的最小值为 2.

对于选项 D, 若 $M > \frac{5\pi}{6}$, 则可以取 $\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \in (0, M)$,

但 $f(\frac{\pi}{2}), f(\frac{5\pi}{6}), f(\frac{5\pi}{6})$ 不能构成三角形, 因此 $0 < M \leq \frac{5\pi}{6}$.

下面证明当 $M = \frac{5\pi}{6}$ 时, $f(x)$ 具有“性质 P”.

若 $x, y, z \in (0, \frac{5\pi}{6})$ 且能构成三角形, 不妨设 $x \leq y \leq z$.



当 $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6})$ 时, $\sin x + \sin y > 1 \geq \sin z$,

同理, $\sin x + \sin z > \sin y$, $\sin z + \sin y > \sin x$, 所以 $\sin x, \sin y, \sin z$ 能构成三角形.

当 $x \in (0, \frac{\pi}{6})$ 时, 此时 $x + y > z$, $\frac{\pi}{2} > \frac{x+y}{2} > \frac{z}{2}$, $0 < \frac{y-x}{2} < \frac{z}{2} < \frac{\pi}{2}$,

故 $\sin x + \sin y = 2\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} > 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{z}{2}$,

所以 $\sin x + \sin y > \sin z$, 同理可得 $\sin x + \sin z > \sin y$,

又 $\sin z + \sin y = 2\sin \frac{z+y}{2} \cos \frac{z-y}{2}$,

若 $z + y \leq \pi$, 则 $\sin z + \sin y > 2\sin \frac{z}{2} \cos \frac{y}{2} = \sin x$,

若 $z + y > \pi$, 则 $x + z + y < \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{3} < 2\pi$, 所以 $\frac{x+z+y}{2} < \pi$,

所以 $0 < \frac{x}{2} < \pi - \frac{z+y}{2} < \frac{\pi}{2}$, 而 $0 < \frac{z-y}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$,

所以 $\sin z + \sin y = 2\sin(\pi - \frac{y+z}{2}) \cos \frac{z-y}{2} > 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \sin x$,

所以 $\sin x, \sin y, \sin z$ 能构成三角形.

因此命题得证, 从而 M 可以取得 $\frac{5\pi}{6}$, 命题 D 错误, 故选 ABC.

三、填空题

13. 36

14. $\sqrt{3}$

如图所示, 把三棱锥 $A-BCD$ 补成一个平行六面体,

其中 PQ 为异面直线 AB, CD 的公垂线, 即 $PQ \perp AB, PQ \perp CD$ 且 $PQ=3$,

在平行六面体中, 可得 $AB \parallel CE$, 所以 $PQ \perp CE$,

又因为 $CD \cap CE = C$ 且 $CD, CE \subset$ 平面 $CDFE$,

所以 $PQ \perp$ 平面 $CDFE$,

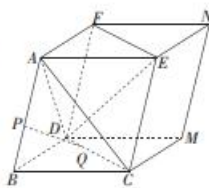
又 $AB \parallel$ 平面 $CDFE$, 所以点 A 到平面 $CDFE$ 的距离 $d=3$, 因为 $AB \parallel CE$ 且异面直线 AB 与 CD 所成的角为 60° , 所以 CE 与 CD 所成的角为 60° .

又因为 $AB=CE=CD=2$,

所以 $V_{A-BCD} = V_{A-DEF} = V_{A-CDE} = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 3 = \sqrt{3}$, 即四面体 $ABCD$ 的体积为 $\sqrt{3}$. 故答案为

$\sqrt{3}$.

15. $x^2 - \frac{y^2}{7} = 1$



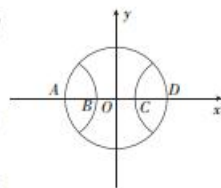
设所求双曲线的方程为 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$, 如图, 因为 $AB = BC = CD = 2$, 所以易知 $a = 1$,

又坐标轴和双曲线与圆 O 的交点将圆 O 的周长八等分点, 所以

$(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2})$ 在双曲线上, 得到 $\frac{9}{2} - \frac{9}{b^2} = 1$, 整理得到 $b^2 = \frac{9}{7}$, 故所求

曲线方程为 $x^2 - \frac{7y^2}{9} = 1$.

故答案为 $x^2 - \frac{7y^2}{9} = 1$.



16. $a < b < c$

$a = \ln 1.3 = \ln(1 + 0.3), b = 0.3, c = \sqrt[3]{e} - 1$,

令 $f(x) = \ln(x+1) - x, x \in (0, 1)$, 可得 $f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 < 0$, 所以 $f(x)$ 单调递减,

所以 $f(0.3) < f(0) = 0$, 即 $a < b$, 令 $g(x) = e^x - (x+1), x \in (0, 1)$, 可得 $g'(x) = e^x - 1 > 0$,

所以 $g(x)$ 单调递增, 所以 $g(0.3) > g(0) = 0$, 即 $e^{0.3} > 1.3$,

又由 $\sqrt[3]{e} = e^{\frac{1}{3}} > e^{0.3}$, 可知 $\sqrt[3]{e} > 1.3$, 即 $\sqrt[3]{e} - 1 > 0.3$, 所以 $b < c$, 所以 $a < b < c$.

故答案为 $a < b < c$.

四、解答题

17. (1) $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$ (2) $4\sqrt{2}$

解: (1) 因为 $6\cos B\cos C - 1 = 3\cos(B-C) = 3\cos B\cos C + 3\sin B\sin C$,

所以 $3\cos B\cos C - 3\sin B\sin C = 3\cos(B+C) = 1, \cos(B+C) = \frac{1}{3}$,

又 $A+B+C = \pi, \cos(B+C) = \cos(\pi-A) = -\cos A$, 所以 $\cos A = -\frac{1}{3}$,

又 $A \in (0, \pi)$, 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

则 $\cos C = -\cos(A+B) = \sin A \sin B - \cos A \cos B = \frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$ 5 分

(2) 由 (1) 知 $\cos A = -\frac{1}{3}$, 则 $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

由 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ADB}$, 得 $\frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}b \cdot AD \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}c \cdot AD \sin \frac{A}{2}$,

即 $2bc \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = b \cdot AD \sin \frac{A}{2} + c \cdot AD \sin \frac{A}{2}$,

则 $6b \cos \frac{A}{2} = (3+b)AD$, 即 $2\sqrt{3}b = (3+b) \cdot \frac{8\sqrt{3}}{7}$, 解得 $b = 4$,

【高二数学·参考答案 第4页(共8页)】

• 23-574B •



所以 $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$ 10分

18. (1) 证明见解析, $a_n = 3^n + n$ (2) $2n^2 - n + \frac{9(9^n - 1)}{8}$

(1) 证明: $a_{n+1} = 3a_n - 2n + 1$ 变形得 $a_{n+1} - (n+1) = 3a_n - 3n = 3(a_n - n)$,

又 $a_1 - 1 = 3 \neq 0$, 所以 $\frac{a_{n+1} - (n+1)}{a_n - n} = 3$, 故 $\{a_n - n\}$ 是首项为 3, 公比为 3 的等比数列.

从而 $a_n - n = 3^n$, 即 $a_n = 3^n + n$ 4分

(2) 解: 由(1)知 $b_n = \begin{cases} 2n-1, & n \text{ 为奇数,} \\ 3^n, & n \text{ 为偶数,} \end{cases}$ 故数列 $\{b_n\}$ 的奇数项是以 1 为首项, 4 为公差的等差数列, 偶数项是以 9 为首项, 9 为公比的等比数列,

所以 $T_{2n} = (b_1 + b_3 + \dots + b_{2n-1}) + (b_2 + b_4 + \dots + b_{2n}) = n + \frac{n(n-1)}{2} \times 4 + \frac{9(1-9^n)}{1-9} = 2n^2 - n + \frac{9(9^n - 1)}{8}$ 12分

19. (1) 证明见解析 (2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(1) 证明: 由题意, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2, AD=AP=4, AB \perp AD$, M, N 分别是 BC, PD 的中点,

$\therefore BM=CM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=2, AB=CD=2$.

在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$,

平面 $PAD \cap$ 平面 $ABCD = AD, AB \perp AD, \therefore AB \perp$ 平面 PAD ,

$PAC \subset$ 平面 $PAD, \therefore PA \perp AB$,

取 AP 的中点 E , 连接 BE , 由几何知识得 $BE \parallel MN$,

$\therefore AD \perp MN, \therefore AD \perp BE, AD \perp AB$,

$\therefore BE \subset$ 平面 $PAB, AB \subset$ 平面 $PAB, AB \cap BE = B$,

$\therefore AD \perp$ 平面 $PAB, \therefore PA \perp AD$.

以 AB, AD, AP 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 如图所示,

$\therefore A(0, 0, 0), B(2, 0, 0), C(2, 4, 0), D(0, 4, 0), P(0, 0, 4), M(2, 2, 0), N(0, 2, 2)$,

$\therefore \overrightarrow{MN} = (-2, 0, 2)$, 平面 PAB 的一个法向量为 $\overrightarrow{AD} = (0, 4, 0)$,

$\therefore \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AD} = -2 \times 0 + 0 \times 4 + 2 \times 0 = 0$,

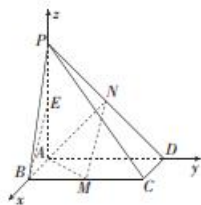
$\therefore MN \parallel$ 平面 PAB 5分

(2) 解: 由题意及(1)的图得,

在平面 AMN 中, $A(0, 0, 0), M(2, 2, 0), N(0, 2, 2), \overrightarrow{AM} = (2, 2, 0), \overrightarrow{AN} = (0, 2, 2)$,

设法向量为 $m = (x_1, y_1, z_1)$,

则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AN} = 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 2x_1 + 2y_1 = 0, \\ 2y_1 + 2z_1 = 0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x_1 = -y_1, \\ z_1 = -y_1, \end{cases}$



当 $y_1 = -1$ 时, $m = (1, -1, 1)$,

平面 AMB 的一个法向量为 $\vec{AP} = (0, 0, 4)$, 设二面角 $N-AM-B$ 为 θ ,

$$\therefore |\cos \theta| = \left| \frac{m \cdot \vec{AP}}{|m| |\vec{AP}|} \right| = \left| \frac{1 \times 0 + (-1) \times 0 + 1 \times 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} \times \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2}} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

由图可知二面角 $N-AM-B$ 为钝角, $\therefore$ 二面角 $N-AM-B$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 12 分

20. (1) 分布列见解析, $E(X) = \frac{12}{5}$, $D(X) = \frac{12}{25}$ (2) $\frac{98}{125}$ (3) $\frac{47}{49}$

解: (1) 由题知, 击中次数 $X \sim B(3, \frac{4}{5})$, $X = 0, 1, 2, 3$.

所以 $P(X=0) = (\frac{1}{5})^3 = \frac{1}{125}$; $P(X=1) = C_3^1 \cdot \frac{4}{5} \cdot (\frac{1}{5})^2 = \frac{12}{125}$;

$P(X=2) = C_3^2 \cdot (\frac{4}{5})^2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{48}{125}$; $P(X=3) = (\frac{4}{5})^3 = \frac{64}{125}$. 得分布列如下:

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

..... 4 分

由二项分布的期望和方差公式可得 $E(X) = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$, 5 分

$D(X) = 3 \times \frac{4}{5} \times (1 - \frac{4}{5}) = \frac{12}{25}$ 6 分

(2) 记击中 i 次为事件 A_i ($i = 1, 2, 3$), $P(A_1) = \frac{12}{125}$, $P(A_2) = \frac{48}{125}$, $P(A_3) = \frac{64}{125}$,

舰艇被击沉为事件 B ,

则 $P(B|A_1) = \frac{1}{3}$, $P(B|A_2) = \frac{15}{24}$, $P(B|A_3) = 1$,

$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + P(A_3) \cdot P(B|A_3)$

$= \frac{12}{125} \times \frac{1}{3} + \frac{48}{125} \times \frac{15}{24} + \frac{64}{125} \times 1 = \frac{98}{125}$, 即目标舰艇被击沉的概率为 $\frac{98}{125}$ 9 分

(3) 根据(2)中数据,

可得 $P((A_2 \cup A_3) | B) = P(A_2 | B) + P(A_3 | B) = \frac{P(A_2) \cdot P(B|A_2)}{P(B)} + \frac{P(A_3) \cdot P(B|A_3)}{P(B)}$

$= \frac{\frac{48}{125} \times \frac{15}{24}}{\frac{98}{125}} + \frac{\frac{64}{125} \times 1}{\frac{98}{125}} = \frac{47}{49}$, 即当目标舰艇被击沉时, 该舰艇被我军轰炸机至少击中两次的概

率为 $\frac{47}{49}$ 12 分

21. (1) $y^2 = 2x$ (2) $(\frac{1}{2}, 1)$



解:(1)抛物线 C 的焦点为 $F(\frac{p}{2}, 0)$,

若直线 AB 与 x 轴重合,则直线 AB 与抛物线 C 只有一个公共点,不符合题意.

设直线 AB 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}$, 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y^2=2px, \\ x=my+\frac{p}{2}, \end{cases} \text{ 可得 } y^2-2pmy-p^2=0, \Delta=4p^2m^2+4p^2>0,$$

由韦达定理可得 $y_1+y_2=2pm, y_1y_2=-p^2$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|} &= \frac{1}{x_1+\frac{p}{2}} + \frac{1}{x_2+\frac{p}{2}} = \frac{1}{my_1+p} + \frac{1}{my_2+p} = \frac{m(y_1+y_2)+2p}{(my_1+p)(my_2+p)} \\ &= \frac{m(y_1+y_2)+2p}{m^2y_1y_2+mp(y_1+y_2)+p^2} = \frac{2pm^2+2p}{-m^2p^2+2m^2p^2+p^2} = \frac{2p(m^2+1)}{p^2(m^2+1)} = \frac{2}{p} = 2, \text{ 解得 } p=1, \end{aligned}$$

所以抛物线 C 的方程为 $y^2=2x$ 5 分

(2) 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1>0$, 由(1)可得 $y_1+y_2=2m, y_1y_2=-1$,

又因为直线 AO 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x=\frac{y_1^2}{y_1^2}x=\frac{2}{y_1}x$,

将 $y=y_2$ 代入直线 AO 的方程可得 $y_2=\frac{2}{y_1}x$, 可得 $x=\frac{y_1y_2}{2}=-\frac{1}{2}$, 即

点 $D(-\frac{1}{2}, y_2)$,

所以 $k_{DF}=\frac{y_2}{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}=-y_2$, 因为 $AE \perp DF$, 则 $k_{AE}=-\frac{1}{k_{DF}}=\frac{1}{y_2}$,

所以直线 AE 的方程为 $y-y_1=\frac{1}{y_2}(x-x_1)$,

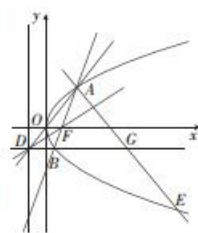
$$\text{联立} \begin{cases} y-y_1=\frac{1}{y_2}(x-x_1), \\ y^2=2x, \end{cases} \text{ 可得 } y^2-2y_2y-2x_1-2=0, \text{ 则 } y_1+y_E=2y_2,$$

故 $y_E=2y_2-y_1$, 则 $x_E=y_2y_E+x_1+1=y_2(2y_2-y_1)+x_1+1=x_1+2y_2^2-y_1y_2+1=x_1+4x_2+2$,

由 AE 的中点为 G , 可得 $G(x_1+2x_2+1, y_2)$,

故 G, B, D 三点共线, 则 $\frac{|GB|}{|GD|}=\frac{x_1+2x_2+1-x_2}{x_1+2x_2+1+\frac{1}{2}}=\frac{x_1+x_2+1}{x_1+2x_2+\frac{3}{2}}$.

又由 $y_1y_2=-1$, 知 $x_1x_2=\frac{y_1^2y_2^2}{4}=\frac{1}{4}$,



$$\begin{aligned} \text{所以 } \frac{|GB|}{|GD|} &= \frac{x_1 + \frac{1}{4x_1} + 1}{x_1 + \frac{1}{2x_1} + \frac{3}{2}} = \frac{x_1^2 + \frac{1}{4} + x_1}{x_1^2 + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_1} = 1 - \frac{1+2x_1}{4x_1^2+6x_1+2} = 1 - \frac{2x_1+1}{(2x_1+1)(2x_1+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{2x_1+2} \in (\frac{1}{2}, 1). \text{ 故 } \frac{|GB|}{|GD|} \text{ 的取值范围为 } (\frac{1}{2}, 1). \dots\dots\dots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

22. (1)0 (2)证明见解析.

(1)解:由题意, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \ln x + t$,

$$g(x) = f'(x) = x - \ln x - 1, x > 0, g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}, \text{ 令 } g'(x) = 0, \text{ 解得 } x = 1,$$

又当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 单调递增,

所以 $g(x) \geq g(1) = 0$, 即 $g(x)$ 的最小值为 0. 4 分

(2)证明:由(1)得, $g(x) = x - 1 - \ln x \geq 0$,

可知 $x - 1 \geq \ln x$, 当且仅当 $x = 1$ 时, 等号成立,

$$\text{令 } x = 1 + \frac{1}{k^2} \neq 1, \text{ 则 } \ln(1 + \frac{1}{k^2}) < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}, k = 2, 3, 4, \dots, n.$$

$$\text{所以 } \ln(1 + \frac{1}{2^2}) + \ln(1 + \frac{1}{3^2}) + \ln(1 + \frac{1}{4^2}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{n^2})$$

$$< (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n} < 1,$$

$$\text{即 } \ln(1 + \frac{1}{2^2}) + \ln(1 + \frac{1}{3^2}) + \ln(1 + \frac{1}{4^2}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{n^2}) < 1,$$

$$\text{也即 } \ln[(1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{3^2})(1 + \frac{1}{4^2}) \dots (1 + \frac{1}{n^2})] < \ln e,$$

$$\text{所以 } (1 + \frac{1}{2^2})(1 + \frac{1}{3^2})(1 + \frac{1}{4^2}) \dots (1 + \frac{1}{n^2}) < e,$$

故对任意正整数 $n(n \geq 2)$, 都有 $(1 + \frac{1}{2^2}) \times (1 + \frac{1}{3^2}) \times (1 + \frac{1}{4^2}) \times \dots \times (1 + \frac{1}{n^2}) < e$ 12 分



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服

务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线

