

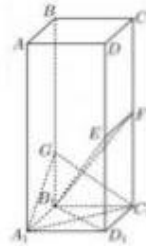
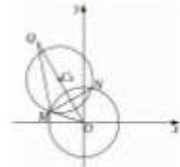
2023年4月玉林市高三年级教学质量检测

数学(理科)参考答案

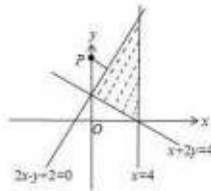
一、选择题

1. D. 解: 设复数  $z$  对应的点为  $(x, y)$ , 则  $x = |z| \cos 120^\circ = 2 \times (-\frac{1}{2}) = -1$ ,  
 $y = |z| \sin 120^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ .  $\therefore$  复数  $z$  对应的点为  $(-1, \sqrt{3})$ , 则  $z = -1 + \sqrt{3}i$ .
2. B. 解: 集合  $A = \{0, 1, 2\}$ ,  $A \cup B = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  
 对于 A, 由并集定义得 0 不一定是 B 中元素, 故 A 错误;  
 对于 B,  $3 \in B$ ,  $\therefore 3 \in C_A B$ , 故 B 正确;  
 对于 C, 由并集定义得 B 中一定有元素 3, 不一定有元素 0, 1, 2, 故 C 错误;  
 对于 D, 当  $B = \{3\}$  时,  $A \subseteq B$  不成立, 故 D 错误.
3. D. 解: 取  $x=4, y=1$ , 则  $x+y=5$   
 故  $x \geq 3$  且  $y \geq 2$  不能推出  $x+y=5$ ,  
 取  $x=3, y=4$ , 可得  $x+y=5$ , 但  $x=3$ ,  
 所以由  $x+y=5$  不能推出  $x \geq 3$  且  $y \geq 2$ ,  
 所以 p 是 q 的既不充分也不必要条件.
4. B. 解: 对于 A, 由图乙可知, 样本中男生, 女生都大部分愿意选择该门课,  
 则样本中愿意选该门课的人数较多, A 错误;  
 对于 BCD, 由图甲可知, 在愿意和不愿意的人中, 都是男生占比较大,  
 所以可以确定, 样本中男生人数多于女生人数, B 正确, CD 错误.
5. D. 解: 对于 A,  $\alpha$  内有无数条直线与  $\beta$  平行, 则平面  $\alpha$  与  $\beta$  相交或平行, 故 A 错误;  
 对于 B,  $\alpha, \beta$  垂直于同一个平面, 则平面  $\alpha$  与  $\beta$  相交或平行, 故 B 错误;  
 对于 C,  $\alpha, \beta$  平行于同一条直线, 则平面  $\alpha$  与  $\beta$  相交或平行, 故 C 错误;  
 对于 D,  $\alpha, \beta$  垂直于同一条直线, 则平面  $\alpha$  与  $\beta$  平行, 故 D 正确.
6. D. 解: 由题可得  $a+c=S_1+R, a-c=S_2+R$ ,  
 $\therefore b^2 = a^2 - c^2 = (S_1+R)(S_2+R)$ , 故  $b = \sqrt{(S_1+R)(S_2+R)}$ ,  $\therefore 2b = 2\sqrt{(S_1+R)(S_2+R)}$ .
7. D. 解: 由题可得  $C_n^1 = C_n^2$ ,  $\therefore n=4$ .

- 令  $x=-1$ , 得  $(3+1)^n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 256$ ,  $\therefore a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^n a_n = 256$ .
8. C. 解: 由题意可知,  $S_2, S_3 - S_2, S_4 - S_3$  为等比数列, 则  $(S_3 - S_2)^2 = S_2(S_4 - S_3)$ ,  
 $\therefore \frac{S_3}{S_2} = \frac{1}{6}$ ,  $\therefore 25S_2^2 = S_2 S_3 - 6S_2^2$ , 解得  $S_3 = 31S_2$ ,  $\therefore \frac{S_3}{S_2} = 31$ .
9. B. 解: 根据题意, 在区间  $[0, \pi]$  上, P 在曲线 MD 上运动, 此时设  $\angle PAM = \theta$ ,  
 $y = \frac{1}{2} AB \times AP \times \sin \theta = 2 \sin \theta$ . 在区间  $[\pi, \pi+2]$  上, P 在 DC 上运动, 此时 y 为定值 2,  
 在区间  $[\pi+2, \pi+4]$  上, P 在 CB 上运动, 此时  $y = \frac{1}{2} \times AB \times PB = PB = \pi + 4 - x$ .  
 分析选项, 其图象与 B 选项对应.
10. A. 解: 因为  $f(x) = 2 \sin x + 4 \cos x = 2\sqrt{5} \sin(x + \theta)$ , 其中  $\sin \theta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  
 当  $x = \theta$  时,  $f(x)$  取得最大值, 即  $\theta + \theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , 所以  $\theta = \frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,  
 所以  $\cos \theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta + 2k\pi) = \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .
11. C. 解: 设  $P(x, y)$ , 由  $2|PA| = |PB|$ , 得  $2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$ , 整理得:  $x^2 + y^2 = 4$ ,  
 $\therefore C_1: x^2 + y^2 = 4$ ; 又圆  $C_2: (x+\sqrt{5})^2 + (y-3)^2 = 4$ ,  
 $\therefore \overline{MN} \cdot \overline{MQ} = \overline{MN} \cdot (\overline{MO} + \overline{OQ}) = \overline{MN} \cdot \overline{MO}$ ,  
 联立  $C_1$  与  $C_2$ , 得  $MN: \sqrt{5}x - 3y + 6 = 0$ ,  
 $\therefore O$  点到直线 MN 的距离  $d = \frac{|6|}{\sqrt{5+9}} = \sqrt{5}$ ,  
 则  $|MN| = 2\sqrt{OM^2 - d^2} = 2\sqrt{4-3} = 2$ ,  
 $\therefore \overline{MN} \cdot \overline{MQ} = \overline{MN} \cdot (\overline{MO} + \overline{OQ}) = \overline{MN} \cdot \overline{MO} = \frac{1}{2} |\overline{MN}|^2 = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$ .
12. A. 解: 如图, 连接  $B_1D_1, A_1C_1$ , 又  $A_1C_1 \perp B_1D_1, ED_1 \perp$  平面  $A_1B_1C_1D_1$ ,  
 因  $A_1C_1 \subset$  平面  $A_1B_1C_1D_1$ , 则  $ED_1 \perp A_1C_1$ ,  
 又  $B_1D_1 \subset$  平面  $EB_1D_1, ED_1 \subset$  平面  $EB_1D_1, ED_1 \cap B_1D_1 = D_1$ , 则  $A_1C_1 \perp$  平面  $EB_1D_1$ ,  
 又  $B_1E \subset$  平面  $EB_1D_1$ , 则  $A_1C_1 \perp B_1E$ ,  
 如图, 过 E 做  $D_1C_1$  平行线, 交  $CC_1$  于 F, 则 F 为  $CC_1$  中点,  
 连接 EF,  $B_1F$ , 过  $C_1$  作  $B_1F$  垂线, 交  $BB_1$  于 G,  
 由题可得,  $D_1C_1 \perp$  平面  $BCC_1B_1$ , 又  $EF \parallel D_1C_1$ , 则  $EF \perp$  平面  $BCC_1B_1$ .



因  $C_1G \subset$  平面  $BCC_1B_1$ , 则  $C_1G \perp EF$ .  
又  $B_1F \subset$  平面  $B_1FE$ ,  $FE \subset$  平面  $B_1FE$ ,  $FE \cap B_1F = F$ , 则  $C_1G \perp$  平面  $B_1FE$ .  
因为  $B_1E \subset$  平面  $B_1FE$ , 则  $C_1G \perp B_1E$ .  
因为  $C_1G \subset$  平面  $C_1GA_1$ ,  $C_1A_1 \subset$  平面  $C_1GA_1$ ,  $C_1A_1 \cap C_1G = C_1$ , 则  $B_1E \perp$  平面  $C_1GA_1$ .  
连接  $A_1G$ . 则点  $P$  轨迹为平面  $C_1GA_1$  与四棱柱的交线, 即  $\triangle A_1CG$ .  
注意到  $\angle B_1C_1G + \angle GC_1F = \angle GC_1F + \angle B_1FC_1$ , 故  $\angle B_1C_1G = \angle B_1FC_1$ ,  $\angle C_1B_1G = \angle FC_1B_1$ .  
则  $\triangle C_1B_1F \sim \triangle FC_1B_1$ , 故  $\frac{C_1B_1}{B_1G} = \frac{FC_1}{C_1B_1} = 2$ ,  $B_1G = \frac{1}{2}$ .  
则点  $P$  的轨迹的长为  $A_1G + C_1G + A_1C_1 = 2\sqrt{1 + \frac{1}{4}} + \sqrt{2} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ .



二. 填空题

13. 答案为: 1. 解: 由  $f(x) = x - \frac{a}{x}$ , 得  $f'(x) = 1 + \frac{a}{x^2}$ .

由于切线与直线  $y=2x$  平行,  $\therefore f'(1) = 1 + a = 2$ , 即  $a=1$ .

14. 答案为:  $\frac{4}{5}$ . 解: 由约束条件作出可行域如图,

$z = x^2 + (y-4)^2$  的几何意义为可行域内动点到定点  $P(0,4)$  距离的平方.

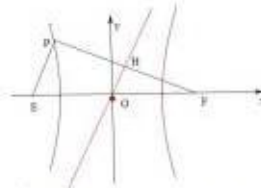
则  $z = x^2 + (y-4)^2$  的最小值为  $(\frac{-4+2}{\sqrt{4+1}})^2 = \frac{4}{5}$ .

15. 答案为:  $\sqrt{5}$ . 解: 如图: 由点  $F$  关于直线  $l$  的对称点为  $F'$ , 可知  $FH \perp OH$ . 又  $F(c,0)$  到渐近线

$$E: y = \frac{b}{a}x \text{ 的距离为 } d = \frac{\frac{bc}{a}}{\sqrt{1 + (\frac{b}{a})^2}} = \frac{bc}{a^2}, \text{ 即 } FH = \frac{bc}{a^2}, OH = \frac{b^2}{a^2}$$

$\therefore PF = 2b$ ,  $PE = 2a$ . 由双曲线的定义可知  $2b - 2a = 2a$ ,  $\therefore b = 2a$ .

又  $c^2 = b^2 + a^2 = 5a^2$ ,  $\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{5}$ .



16. 答案为: 44. 解: 由题意, 可得  $h(x) = f(x-4) + x = e^{-(x-4)} - e^{-x} + x$ , 设等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项

和为  $S_n$ , 公差为  $d$ . 则  $S_{11} = 11a_1 + \frac{11 \times 10}{2}d = 11(a_1 + 5d) = 11a_6 = 44$ , 解得  $a_6 = 4$ .

则  $h(a_6) = h(4) = e^{-(4-4)} - e^{-4} + 4 = a_6 = 4$ . 根据等差中项的性质, 可得  $a_1 + a_{11} = 2a_6 = 8$ .

$$\begin{aligned} \text{则 } h(a_1) + h(a_{11}) &= e^{-(a_1-4)} - e^{-a_1} + a_1 + e^{-(a_{11}-4)} - e^{-a_{11}} + a_{11} \\ &= \frac{1}{e^{a_1-4}} + \frac{1}{e^{a_{11}-4}} - (e^{a_1-4} + e^{a_{11}-4}) + a_1 + a_{11} = \frac{e^{4-a_1} + e^{4-a_{11}}}{e^{a_1-4} e^{a_{11}-4}} - (e^{a_1-4} + e^{a_{11}-4}) + a_1 + a_{11} = a_1 + a_{11} = 8, \end{aligned}$$

同理可得,  $h(a_2) + h(a_8) = 8$ ,  $h(a_3) + h(a_7) = 8$ ,  $h(a_4) + h(a_6) = 8$ ,  $h(a_5) + h(a_5) = 8$ .

$$\therefore h(a_1) + h(a_2) + \dots + h(a_{11}) = 5 \times 8 + 4 = 44.$$

三. 解答题

17. 解: (1) 由已知及正弦定理得  $\sin A \cos B + \sin B \sin A = \sin C$  (1分)

$$\therefore \sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad (2 \text{分})$$

$$\therefore \sin B \sin A = \cos A \sin B \quad (3 \text{分})$$

$$\therefore \sin B \neq 0, \therefore \tan A = 1 \quad (4 \text{分})$$

$$\therefore A \in (0, \pi) \therefore A = \frac{\pi}{4} \quad (6 \text{分}) \text{ (不写角 } A \text{ 范围扣一分)}$$

$$(2) \because S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{\sqrt{2}}{4}bc = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \quad (7 \text{分})$$

$$\therefore bc = 2 - \sqrt{2} \quad (8 \text{分})$$

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (9 \text{分})$$

$$\therefore 2 = (b+c)^2 - (2 + \sqrt{2})bc \quad (10 \text{分})$$

$$\text{所以 } (b+c)^2 = 4, b+c=2. \quad (12 \text{分})$$

18. 证明: (1) 方法一: 如图, 取  $PB$  中点  $E$ , 连接  $ME, NE$ .

$\because M, N$  分别是线段  $AB, PC$  的中点,  $\therefore ME \parallel PA$ .

又  $\because ME \subset$  平面  $PAD, PA \subset$  平面  $PAD$ ,

$\therefore ME \parallel$  平面  $PAD$ . 同理得  $NE \parallel$  平面  $PAD$ . (2分)

又  $\because ME \cap NE = E, \therefore$  平面  $PAD \parallel$  平面  $MNE$ . (3分)

$\because MN \subset$  平面  $MNE, \therefore MN \parallel$  平面  $PAD$ . (4分) (直接由线线平行得面面平行只给2分)

方法二: 取  $PB$  中点  $F$ , 连接  $AF, NF$ .

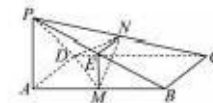
$\because M, N$  分别是线段  $AB, PC$  的中点,  $\therefore NF \parallel DC$ . (1分)  $AM \parallel DC$  且  $NF = \frac{1}{2}DC, AM = \frac{1}{2}DC$

$\therefore NF \parallel AM$  且  $NF = AM$ . (2分) 故四边形  $AMNF$  为平行四边形,  $\therefore MN \parallel AF$  (3分)

又  $\because MN \subset$  平面  $PAD, AF \subset$  平面  $PAD, \therefore MN \parallel$  平面  $PAD$  (4分)

(2)  $\because ABCD$  为矩形,  $\therefore AB \perp AD, PA \perp$  平面  $ABCD, \therefore PA, AB, AD$  两两垂直.

依次以  $AB, AD, AP$  为  $x, y, z$  轴建立如图的空间直角坐标系. (5分)

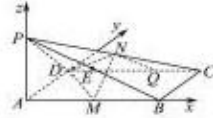


则  $C(4, 2, 0)$ ,  $D(0, 2, 0)$ ,  $P(0, 0, 2)$ ,  $M(2, 0, 0)$ ,  $PC$  中点  $N(2, 1, 1)$ . (6分)

$\therefore \overrightarrow{DM} = (2, -2, 0)$ ,  $\overrightarrow{DN} = (2, -1, 1)$ . (7分)

设平面  $DAMN$  的法向量  $\vec{n} = (x, y, z)$ ,

$$\begin{cases} \overrightarrow{DM} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{DN} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$



取  $x=1$ , 得  $y=1$ ,  $z=-1$ ,  $\vec{n} = (1, 1, -1)$ . (8分)

若满足条件的  $CD$  上的点  $Q$  存在, 设  $Q(t, 2, 0)$ ,  $0 \leq t \leq 4$ , 则  $\overrightarrow{NQ} = (t-2, 1, -1)$ . (9分)

设直线  $NQ$  与平面  $DAMN$  所成的角为  $\theta$ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{NQ} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{NQ}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|t-2+1+1|}{\sqrt{(t-2)^2+1+1} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}, \text{ (10分)}$$

解得  $t=1$  或  $t=3$ . 已知  $0 \leq t \leq 4$ , 则  $t=1$ . (11分)

$\therefore Q(1, 2, 0)$ ,  $DQ=1$ ,  $CD=4$ ,  $CQ=CD-DQ=4-1=3$ ,  $\frac{CQ}{CD} = \frac{3}{4}$ .

故  $CD$  上存在点  $Q$ , 使直线  $NQ$  与平面  $DAMN$  所成角的正弦值为  $\frac{1}{3}$ , 且  $\frac{CQ}{CD} = \frac{3}{4}$ . (12分)

19. (1) 解: 设该考生报考甲大学恰好通过一门笔试题目为事件  $A$ , 该考生报考乙大学恰好通过一门笔试题目为事件  $B$ .

根据题意可得  $P(A) = C_1^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{8}$ . (2分)

$$P(B) = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{21}{54} = \frac{7}{18}. \text{ (4分)}$$

(2) 设该考生报考甲大学通过的科目数为  $X$ , 报考乙大学通过的科目数为  $Y$ ,

根据题意可知,  $X \sim B\left(3, \frac{1}{2}\right)$ , 则  $E(X) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ . (6分)

$$P(Y=0) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} (1-m) = \frac{5}{18} (1-m), \text{ (7分)}$$

$$P(Y=1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} (1-m) + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} (1-m) + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3} m = \frac{11}{18} - \frac{1}{3} m, \text{ (8分)}$$

$$P(Y=2) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} (1-m) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{3} m + \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} m = \frac{1}{9} + \frac{1}{2} m, \text{ (9分)}$$

$$P(Y=3) = \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} m = \frac{1}{9} m, \text{ (10分)}$$

则随机变量  $Y$  的分布列为

$Y$	0	1	2	3
$P$	$\frac{5}{18}(1-m)$	$\frac{11}{18} - \frac{1}{3}m$	$\frac{1}{9} + \frac{1}{2}m$	$\frac{1}{9}m$

$$E(Y) = \frac{11}{18} - \frac{1}{3}m + \frac{2}{9} + m + \frac{1}{3}m + \frac{5}{6} + m = \frac{5}{6} + m. \text{ (11分)}$$

若  $E(Y) > E(X)$ , 则  $\frac{5}{6} + m > \frac{3}{2}$ , 故  $\frac{2}{3} < m < 1$ , 即  $m$  的取值范围是  $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$ . (12分)

20. 解: (1)  $|PM| = |PF| = |FM|$ ,  $\therefore \triangle PFM$  为等边三角形, (1分)

$\therefore \angle FMP = \angle PFM = 60^\circ$ ,

又  $\overrightarrow{FM} \cdot \overrightarrow{FP} = |FM| \cdot |FP| \cos \angle PFM = |FM|^2 \cos 60^\circ = 32$ ,  $\therefore |FM| = 8$ , (3分)

设直线  $l$  交  $x$  轴于  $N$  点, 则在  $\triangle AMN$  中  $\angle NMF = 30^\circ$ ,  $|NF| = 4 - p$ . (4分)

$\therefore C$  的方程为  $y^2 = 8x$ . (5分)

(2) 设  $C(x_1, y_1)$ ,  $D(x_2, y_2)$ , 由 (1) 可得焦点  $F(2, 0)$ . (6分)

$$\text{由重心坐标公式得 } \begin{cases} 2 = \frac{x_1 + x_2 + 2}{3} \\ 0 = \frac{y_1 + y_2 + 4}{3} \end{cases} \text{ (7分)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ y_1 + y_2 = -4 \end{cases} \text{ (8分)}$$

$\therefore CD$  中点坐标为  $(2, -2)$ . (9分)

$$\text{将 } C, D \text{ 的坐标代入抛物线的方程可得: } \begin{cases} y_1^2 = 8x_1 \\ y_2^2 = 8x_2 \end{cases}$$

作差整理可得  $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8}{y_1 + y_2} = \frac{8}{-4} = -2$ , 即直线  $CD$  的斜率  $k = -2$ . (11分)

所以直线  $CD$  的方程为  $y + 2 = -2(x - 2)$ , 即  $2x + y - 2 = 0$ . (12分)

21. 解: (1) 当  $a=1$  时,  $f(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1}$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2}$ . (2分)

则  $f'(x) > 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增,

所以  $f(x)$  的单调递增区间为  $(0, +\infty)$ , 无单调递减区间. (4分)

(2) 证明:  $g(x) = a(x^2 - 1) \ln x - (x - 1)^2 = (x^2 - 1) \left( a \ln x - \frac{x-1}{x+1} \right) = (x^2 - 1) f(x)$ ,



$g(1) = 0, f(1) = 0$ , 则  $f(x)$  除 1 外还有两个零点. (5分)

$$\text{因为 } f\left(\frac{1}{x}\right) = -ax - \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = -ax - \frac{1-x}{1+x} = -ax + \frac{x-1}{x+1} = -f(x).$$

若  $f(x) = 0$ , 则  $f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ , 所以  $x_1 < x_2 = 1 < x_3$  且  $x_1 = \frac{1}{x_3}$ . (7分)

当  $x > 1$  时, 先证明不等式  $bx > \frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$  恒成立.

$$\text{设 } \varphi(x) = bx - \frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}, \text{ 则 } \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{12(x^2+x+1)}{(x^2+4x+1)^2} = \frac{(x-1)^4}{x(x^2+4x+1)^2} > 0,$$

所以函数  $\varphi(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 于是  $\varphi(x) > \varphi(1) = 0$ .

即当  $x > 1$  时, 不等式  $bx > \frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$  恒成立. (9分)

$$\text{由 } f(x_1) = 0, \text{ 可得 } \frac{x_1-1}{x_1+1} = ax_1 > \frac{3a(x_1^2-1)}{x_1^2+4x_1+1}. \quad (10分)$$

$$\text{因为 } x_1 > 1, \text{ 所以 } \frac{1}{x_1+1} > \frac{3a(x_1+1)}{x_1^2+4x_1+1}, \text{ 即 } x_1^2+4x_1+1 > 3a(x_1+1)^2.$$

$$\text{两边同除以 } x_1, \text{ 得 } x_1+4+\frac{1}{x_1} > 3a\left(x_1+2+\frac{1}{x_1}\right). \quad (11分)$$

$$\text{所以 } x_1+x_1+4 > 3a(x_1+x_1+2), \text{ 所以 } (3a-1)(x_1+x_1+2) < 2. \quad (12分)$$

22. (1) 由于直线  $l$  过原点, 且倾斜角为  $\frac{\pi}{3}$ , 故其极坐标方程为  $\theta = \frac{\pi}{3} (\rho \in \mathbb{R})$ . (2分)

$$\text{由曲线 } C \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = 2 + \cos \alpha \\ y = 2 + \sin \alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数}),$$

得曲线  $C$  的普通方程为  $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$ , 即  $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$ . (3分)

$$\text{由 } \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} (4分) \text{ 得 } C \text{ 的极坐标方程为 } \rho^2 - 4\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 7 = 0. (5分)$$

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} \rho^2 - 4\rho \cos \theta - 4\rho \sin \theta + 7 = 0 \\ \theta = \frac{\pi}{3} \end{cases}, \text{ 得 } \rho^2 - (2\sqrt{3}+2)\rho + 7 = 0. \quad (6分)$$

设点  $A, B$  对应的极径分别为  $\rho_1, \rho_2$ , 则  $\rho_1 + \rho_2 = 2\sqrt{3}+2, \rho_1\rho_2 = 7$ . (8分)

$$\therefore \frac{1}{|OA|} + \frac{1}{|OB|} = \frac{|OA| + |OB|}{|OA| \cdot |OB|} = \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1\rho_2} = \frac{2\sqrt{3}+2}{7}. \quad (10分)$$

$$23. \text{ 解: (1) 解: } f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -2 \\ 4, & -2 \leq x \leq 2 \\ 2x, & x > 2 \end{cases} (1分)$$

①当  $x < -2$  时, 不等式即为  $-2x \geq 2x+4$ , 解得  $x \leq -1, \therefore x < -2$ ; (2分)

②当  $-2 \leq x \leq 2$  时, 不等式即为  $4 \geq 2x+4, x \leq 0, \therefore -2 \leq x \leq 0$ ; (3分)

③当  $x > 2$  时, 不等式即为  $2x \geq 2x+4, x \in \emptyset$ . (4分)

综上, 不等式  $f(x) \geq 2x+4$  的解集为  $(-\infty, 0]$ . (5分)

(2) 证明: 由绝对值不等式的性质可得:  $|x-2| + |x+2| \geq |(x-2) - (x+2)| = 4$ ,

$\therefore$  当  $-2 \leq x \leq 2$  时,  $f(x)$  取最小值 4, 即  $k=4$ .

$\therefore a(b+c) = 4$ , 即  $ab+ac = 4$ . (7分)

$$\therefore 2a^2 + b^2 + c^2 = (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) \geq 2ab + 2ac = 8. (9分)$$

当且仅当  $a=b=c=\sqrt{2}$  时等号成立. (10分)

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：  
www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：[zizzsw](https://www.zizzs.com)。



微信搜一搜

自主选拔在线