

高三数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = 2i - \frac{1-i}{1+i}$ ，则 $|z| =$

A. $\sqrt{5}$ B. 2 C. 3 D. $\sqrt{6}$
2. 已知集合 $M = \{x | x^2 - x - 2 < 0\}$ ， $N = \{x | y = \sqrt{1 - \ln x}\}$ ，则 $M \cup N =$

A. $(-\infty, e]$ B. $(0, 2)$ C. $(-1, e]$ D. $(-1, 2)$
3. 若 $b \neq 0$ ，则“ $b = \sqrt{ac}$ ”是“ a, b, c 成等比数列”的

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 若正数 x, y, z 满足 $5^x = 6^y = \log_7 z$ ，则

A. $z > y > x$ B. $z > x > y$ C. $y > z > x$ D. $x > z > y$
5. 春节期间，小胡、小张、小陈、小常四个人计划到北京、重庆、成都三地旅游，每个人只去一个地方，每个地方至少有一个人去，且小胡不去北京，则不同的旅游方案共有

A. 18 种 B. 12 种 C. 36 种 D. 24 种
6. 已知点 $M(1, 0)$ ，从抛物线 $x^2 = 4y$ 的准线 l 上一点 P 引抛物线的两条切线 PA, PB ，且 A, B 为切点，则点 M 到直线 AB 的距离的最大值是

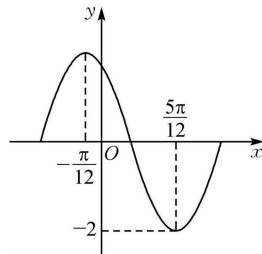
A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3
7. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 2$ ， E 为棱 BB_1 的中点，则平面 AED_1 截正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的截面面积为

A. $\frac{5}{2}$ B. $\frac{7}{2}$ C. 4 D. $\frac{9}{2}$
8. 设 $a = \frac{\sin 1}{3}$ ， $b = \frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ ， $c = \frac{\pi}{9} - \frac{2 - \sqrt{3}}{6}$ ，则

A. $a > b > c$ B. $c > a > b$ C. $a > c > b$ D. $c > b > a$

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

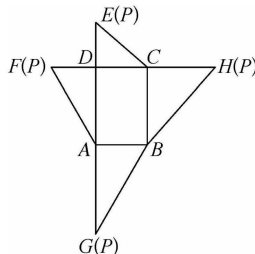
9. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再将所得函数图象上的所有点的横坐标变为原来的 $\frac{3}{2}$ 倍,得到函数 $g(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \pi$) 的图象. 已知函数 $g(x)$ 的部分图象如图所示,则下列关于函数 $f(x)$ 的说法正确的是



- A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$
 - B. $f(x)$ 在区间 $[\frac{\pi}{9}, \frac{\pi}{3}]$ 上单调递减
 - C. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{9}$ 对称
 - D. $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{9}, 0)$ 成中心对称
10. 已知 $a > b > 0, c > d > 0$, 则下列不等式成立的是

- A. $a + c > b + d$
 - B. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$
 - C. $(a+b)^c > (a+b)^d$
 - D. $c^{a+b} > d^{a+b}$
11. 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 P 到两个定点 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$ 的距离的积等于 $\frac{3}{2}$, 记点 P 的轨迹为曲线 C , 则下列说法正确的是

- A. 曲线 C 关于坐标轴对称
 - B. $\triangle F_1PF_2$ 周长的最小值为 $2 + \sqrt{6}$
 - C. $\triangle F_1PF_2$ 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 - D. 点 P 到原点距离的最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$
12. 如图是四棱锥 $P-ABCD$ 的平面展开图, 四边形 $ABCD$ 是矩形, $ED \perp DC, FD \perp DA, DA = 3, DC = 2, \angle FAD = 30^\circ$. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, M 为棱 PB 上一点(不含端点), 则下列说法正确的有



- A. $AM + CM$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{7} + 3\sqrt{3}}{2}$
- B. 存在点 M , 使得 $DM \perp BC$
- C. 四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的体积为 $\frac{16\pi}{3}$
- D. 三棱锥 $M-PAD$ 的体积等于三棱锥 $M-PCD$ 的体积

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = 4x + ax^2$, 若曲线 $y = f(x)$ 过点 $P(1, 1)$ 的切线有两条, 则实数 a 的取值范围为 _____.
14. 已知 $\cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 且 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则 $\tan 2\theta =$ _____.
15. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, $\angle ABC = 60^\circ$, 点 E 是线段 AB 上的一点, 且 $BE = 3AE$, 则 $\vec{EC} \cdot \vec{CD} =$ _____.
16. 2021 年国庆长假期间, 电影《长津湖》正式上映. 某单位 5 位同事小郭、小张、小陈、小李和小常相约一起去电影院观看, 他们各自手上持有的电影票的座位号恰好为 8 排的 5 个相邻的座位编号, 若进入影院后, 每人随机地选择这 5 个座位中的其中一个就座, 设各人所坐的座位号与他持有的电影票座位号不同的人数为 X , 则 $E(X) =$ _____.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

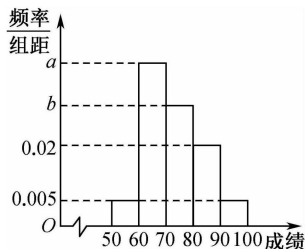
17. (本小题满分 10 分) 全科免费下载公众号《高中僧课堂》

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且 $\triangle ABC$ 的周长为 6, $\sin A + \sin B - \sin C = \frac{b \sin A}{2}$.

- (1)求角 C 的大小;
- (2)若 D 是边 AB 的中点,且 $CD = \sqrt{3}$,求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

为了迎接新高考,某校举行物理和化学等选科考试,其中,400 名学生物理成绩的频率分布直方图如图示.



其中成绩分组区间是: $[50, 60), [60, 70), [70, 80), [80, 90), [90, 100]$,已知成绩在 $[60, 70), [70, 80), [80, 90)$ 之间的人数依次构成等差数列.

- (1)求图中 a, b 的值;
- (2)根据频率分布直方图,估计这 400 名学生物理成绩的中位数(结果保留整数);
- (3)若这 400 名学生物理成绩各分数段的人数(x_i)与化学成绩相应分数段的人数(y_i)之间的关系如下表所示,求化学成绩低于 50 分的人数.

分数段	$[50, 60)$	$[60, 70)$	$[70, 80)$	$[80, 90)$	$[90, 100]$
x_i, y_i 之间的关系	$y_1 = x_1 - 5$	$y_2 = x_2 + 2$	$y_3 = \frac{2}{3}x_3$	$y_4 = \frac{5}{4}x_4$	$y_5 = x_5$

19. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n, a_1 = 1$,且 $(S_n + 1)a_{n+1} + S_n^2 = 0$.

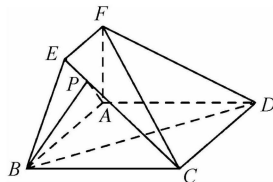
- (1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2)若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ,且 $b_1 = 1, b_{n+1} - b_n = (n-2) \cdot 2^n a_n$,求证: $T_n \leq \frac{3n^2 - 2^{n+1} + 2}{n}$.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, $\angle ABC=60^\circ$, $AB=2$, 平面 $ABEF \perp$ 平面 $ABCD$, $EF \parallel AB$, $\angle BAF=90^\circ$, $AF=EF=1$, 点 P 在线段 CE 上(不包含端点).

(1) 求证: $BD \perp FC$;

(2) 是否存在点 P , 使得二面角 $P-AB-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$? 若存在, 则求出 $\frac{EP}{PC}$ 的值; 若不存在, 请说明理由.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , $|A_1A_2|=4$, 且过点 $(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{6}}{2})$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 若直线 $l: y=k(x-4) (k \neq 0)$ 与 C 交于 M, N 两点, 直线 A_1M 与 A_2N 相交于点 G , 证明: 点 G 在定直线上, 并求出此定直线的方程.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax - 1 (a \in \mathbf{R})$.

(1) 若不等式 $f(x) \geq 0$ 在 $x \in [0, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 $x > 0$, 求证: $(e^x - \frac{1}{2}x^2 + 1) \ln(x+1) > 2x$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

