# 晋中市 2023 年 3 月普通高等学校招生模拟考试

## 数学

（本试卷考试时间 120 分钟，满分 150 分）

注意事项：

1．答题前，考生务必将自己的学校、姓名、班级、准考证号填写在答题卡上相应的位置.

2．全部答案在答题卡上完成，答在本试卷上无效.

3．回答选择题时，选出每小题答案后，用 $2B$ 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑.如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号.回答非选择题时，将答案用 0.5 毫米及以上黑色笔迹签字笔写在答题卡上.

4．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

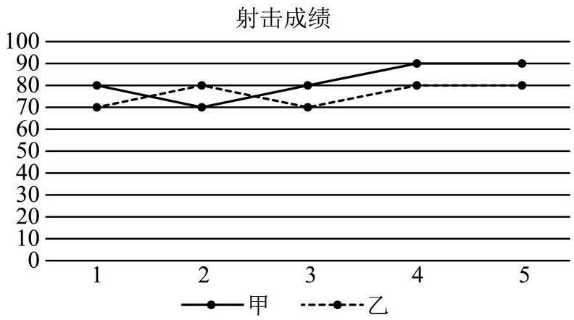
参考公式：锥体的体积公式：$V=\frac{1}{3}Sh$（其中 $S$ 为锥体的底面积，$h$ 为锥体的高）.

一、单项选择题（本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 已知复数 $z$ 满足 $z(1+\mathrm{i})=1-3\mathrm{i}$，则复数 $z$ 的虚部是（　　）

A. $2\mathrm{i}$　　B. $-2$　　C. $-2\mathrm{i}$　　D. 2

2. 甲、乙两位射击运动员参加比赛，连续 5 轮射击比赛的成绩情况如图所示：




则下列说法正确的是（　　）

A. 甲平均成绩高，乙成绩稳定　　B. 甲平均成绩高，甲成绩稳定

C. 乙平均成绩高，甲成绩稳定　　D. 乙平均成绩高，乙成绩稳定

3. 设集合 $U=\{0,1,2,3,4,5\}$，$A=\{x|x^2-7x+12=0\}$，$B=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$（　　）

A. $\{0,2\}$　　B. $\{1,3,4,5\}$　　C. $\{3,4\}$　　D. $\{0,2,3,4\}$

4. 已知函数 $f(x)=2^x-\frac{16}{2^x}(x\in\mathrm{R})$，则 $f(x)$ 的图象（　　）

A. 关于直线 $x=2$ 对称　　B. 关于点 $(2,0)$ 对称　　C. 关于直线 $x=0$ 对称　　D. 关于原点对称

5. 我国古代《九章算术》将底面为矩形的棱台称为刍童．若一刍童为正棱台，其上、下底面分别是边长为 $\sqrt{2}$ 和 $2\sqrt{2}$ 的正方形，高为 1，则该刍童的外接球的表面积为（　　）

A. $16\pi$　　B. $18\pi$　　C. $20\pi$　　D. $25\pi$

6. 设 $F$ 为抛物线 $C$：$y^2=4x$ 的焦点，点 $M$ 在 $C$ 上，点 $N$ 在准线 $l$ 上且 $MN$ 平行于 $x$ 轴，若 $|NF|=|MN|$，则 $|MF|=$（　　）

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B. 1　　C. $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$　　D. 4

7. 已知函数 $f(x)=\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x$ 的图象向左平移 $\varphi(\varphi>0)$ ）个单位长度后对应的函数为 $g(x)$，若 $g(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上单调，则 $\varphi$ 的最小值为（　　）

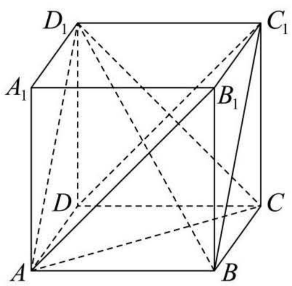
A. $\dfrac{\pi}{12}$　　B. $\dfrac{\pi}{6}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{12}$

8. 已知 $a=\ln\sqrt{2}$，$b=\dfrac{\ln 3}{3}$，$c=\dfrac{1}{e}$，则下列判断正确的是（　　）

A. $c<b<a$　　B. $b<a<c$　　C. $a<b<c$　　D. $c<a<b$

**二、多项选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）**

9. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，则（　　）




A. $BC_1 \perp AC$　　B. 三棱锥 $D-ACD_1$ 与三棱锥 $B-ACD_1$ 体积相等

C. $C_1D$ 与平面 $ACD_1$ 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$　　D. 点 $B_1$ 到平面 $ACD_1$ 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

10. $(1+ax)^{2023}=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2023}x^{2023}$，若 $a_1=-6069$，则下列结论正确的有（　　）

A. $a=3$　　B. $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2023}=-2^{2023}$

C. $\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_2}{3^2}+\cdots+\dfrac{a_{2023}}{3^{2023}}=-1$　　D. $(1+ax)^{2023}$ 的展开式中第 1012 项的系数最大

11. 对于三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，给出定义：设 $f'(x)$ 是函数 $y=f(x)$ 的导数，$f''(x)$ 是函数 $f'(x)$ 的导数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 $x_0$，则称 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的“拐点”．某同学经过探究发现：任何一个三次函数都有“拐点”；任何一个三次函数都有对称中心，且“拐点”就是对称中心．若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+b(b\in\mathrm{R})$，则（　　）

A. $f(x)$ 一定有两个极值点

B. 函数 $y=f(x)$ 在R 上单调递增

C. 过点 $(0,b)$ 可以作曲线 $y=f(x)$ 的 2 条切线

D. 当 $b=\frac{7}{12}$ 时，$f\left(\frac{1}{2023}\right)+f\left(\frac{2}{2023}\right)+f\left(\frac{3}{2023}\right)+\cdots+f\left(\frac{2022}{2023}\right)=2022$

12. 已知椭圆 $C$：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，上顶点为 $B$，直线 $l$：$y=kx(k\neq 0)$ 与椭圆 $C$ 交于 $M$，$N$ 两点，$\angle F_1MF_2$ 的角平分线与 $x$ 轴相交于点 $E$，与 $y$ 轴相交于点 $G(0,m)$，则（　　）

A. 四边形 $MF_1NF_2$ 的周长为 8

B. $\frac{1}{|MF_1|}+\frac{4}{|NF_1|}$ 的最小值为 9

C. 直线 $BM$，$BN$ 的斜率之积为 $-\frac{3}{4}$

D. 当 $m=-\frac{1}{2}$ 时，$|F_1E|:|F_2E|=2:1$

**三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）**

13. 已知向量 $\vec{a}=(\lambda+1,-2)$，$\vec{b}=(1,3)$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $|\vec{a}+\vec{b}|=$____________．

14. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为R，且同时满足下列三个条件：①奇函数，② $f(x)+f(x+2)=0$，

③ $f(x)=\begin{cases}2^x-1, x\in[0,1]\\ \sin\frac{\pi}{2}x, x\in(1,2)\end{cases}$，则 $f(2023)=$____________．

15. 在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $AB\perp BC$，$BC=4$，$AB=1$．若 $\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC}=12$，则 $\frac{1}{2}AD+CD$ 的最小值为____________．

16. 南宋数学家杨辉善于把已知形状、大小的几何图形的求面积、体积的连续量问题转化为求离散量的垛积问题，在他的专著《详解九章算法·商功》中给出了著名的三角垛公式
$1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$，则数列 $\{n^2+2^n\}$ 的前 $n$ 项和为____________．

**四、解答题（本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）**

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$．

（1）求证：数列$\{a_n+1\}$为等比数列；

（2）求数列$\left\{\dfrac{2^n}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$T_n$．

18. $\triangle ABC$的内角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，其中$b=3\sqrt{2}$，且满足$\dfrac{c\sin C}{\sin A}-c=\dfrac{b\sin B}{\sin A}-a$．

（1）求$\triangle ABC$的外接圆半径；

（2）若$\angle B$的平分线$BD$交$AC$于点$D$，且$BD=\sqrt{3}$，求$\triangle ABC$的面积．

19. 从《唐宫夜宴》火爆破圈开始，某电视台推出的“中国节日”系列节目引发广泛关注．某统计平台为调查市民对“中国节日”系列节目的态度，在全市市民中随机抽取了100人，他们年龄的频数分布及对“中国节日”系列节目喜欢的人数如下表．（注：年龄单位为岁，年龄都在$[15,75)$内）

| 年龄 | $[15,25)$ | $[25,35)$ | $[35,45)$ | $[45,55)$ | $[55,65)$ | $[65,75)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 频数 | 10 | 20 | 30 | 20 | 10 | 10 |
| 喜欢人数 | 6 | 16 | 26 | 12 | 6 | 4 |

（1）若以“年龄45岁为分界点”，由以上统计数据完成下面的2×2列联表，并通过计算判断是否能在犯错误的概率不超过0.01的前提下认为对“中国节日”系列节目的态度与人的年龄有关；

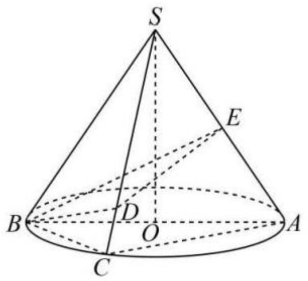
| | 年龄不低于45岁的人数 | 年龄低于45岁的人数 | 合计 |
|---|---|---|---|
| 喜欢 | | | |
| 不喜欢 | | | |
| 合计 | | | |

（2）若按年龄段用分层随机抽样的方法从样本中年龄在$[45,75)$被调查的人中选取8人，现从选中的这8人中随机选取3人，求这3人中年龄在$[55,65)$的人数$X$的分布列和数学期望．

参考公式及数据$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中$n=a+b+c+d$．

| $P(\chi^2\geq k_0)$ | 0.05 | 0.01 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 3.841 | 6.635 | 7.879 | 10.828 |

20. 如图，$C$在以$AB$为直径的圆$O$上，$SO$垂直圆$O$所在的平面，$BS=AB=2$，$CA=CB$，$E$为$AS$的中点，$D$是$SC$上一点，且平面$BDE\perp$平面$SAB$．




（1）求证：$SA \perp BD$；

（2）求平面 $BDE$ 与平面 $SBC$ 夹角的余弦值．

21．已知双曲线 $C$：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，点 $T\left(3,\sqrt{5}\right)$ 在双曲线上．

（1）求双曲线 $C$ 的方程；

（2）若 $A$，$B$ 为双曲线的左、右顶点，$M\left(1,m\right)$，若 $MA$ 与 $C$ 的另一交点为 $P$，$MB$ 与 $C$ 的另一交点为 $Q$（$P$ 与 $A$，$Q$ 与 $B$ 均不重合）求证：直线 $PQ$ 过定点，并求出定点坐标．

22．已知函数 $f\left(x\right)=axe^x-\frac{1}{2}x^2-x$．

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上的单调性；

（2）若 $a>0$ 时，方程 $f\left(x\right)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$ 有两个不等实根 $x_1$，$x_2$，求证：$x_1x_2>e^{2-x_1-x_2}$．