

XCS2022—2023 学年第二学期期末教学质量检测

高二数学

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将答题卡交回。

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $a = (3, -1, 2)$, $b = (x, y, 6)$, 若 a 与 b 共线, 则 $x + y =$

- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $2a_2 + a_3 = 3$, $2a_5 + a_6 = 24$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公比为

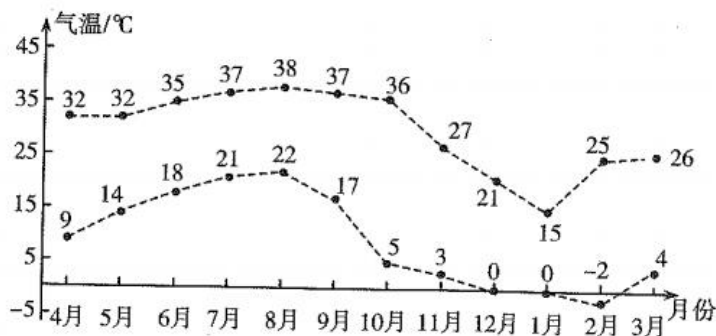
- A. $\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{1}{3}$ D. 3

3. 曲线 $f(x) = e^x(x^2 + x - 2)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程是

- A. $x + y + 2 = 0$ B. $x - y + 2 = 0$ C. $2x - y + 2 = 0$ D. $2x + y + 2 = 0$

4. 下图是某地区 2022 年 4 月至 2023 年 3 月每月最低气温与最高气温($^{\circ}\text{C}$)的折线统计图:

已知每月最低气温与最高气温的线性相关系数 $r = 0.91$, 则下列结论正确的是



- A. 月温差(月最高气温 - 月最低气温)的最大值出现在 1 月
- B. 每月最高气温与最低气温的平均值在 4 - 8 月逐月增加
- C. 每月最低气温与最高气温有较强的线性相关性, 且二者为线性负相关
- D. 9 - 12 月的月温差相对于 5 - 8 月, 波动性更小

高二数学第1页(共6页)

5. 设 X 是一个离散型随机变量, 其分布列为

X	0	1
P	$9m^2 - m$	$3 - 8m$

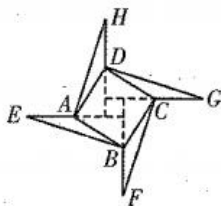
则常数 m 的值为

- A. $\frac{1}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

6. 已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形, 其中 $AD=1, AB=2$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $\triangle PAD$ 为等边三角形, 则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球体积为

- A. $\frac{16\pi}{3}$ B. $\frac{76\pi}{3}$ C. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{9}$ D. $\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$

7. 如图是在“赵爽弦图”的基础上创作出的一个“数学风车”平面模型, 图中正方形 $ABCD$ 内部为“赵爽弦图”(由四个全等的直角三角形和一个小正方形组成), 给 $\triangle ABE, \triangle BCF, \triangle CDG, \triangle DAH$ 这 4 个三角形和“赵爽弦图” $ABCD$ 涂色, 且相邻区域(即图中有公共点的区域)



不同色, 已知有 5 种不同的颜色可供选择, 则不同的涂色方法种数是

- A. 360 B. 120 C. 420 D. 216

8. 已知斜率为 $k(k>0)$ 的直线过抛物线 $C: y^2=4x$ 的焦点 F 且与抛物线 C 相交于 A, B 两点, 过 A, B 分别作该抛物线准线的垂线, 垂足分别为 A_1, B_1 , 若 $\triangle ABB_1$ 与 $\triangle ABA_1$ 的面积之比为 3, 则 k 的值为

- A. $\sqrt{3}$ B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 早在 1733 年, 法国数学家棣莫弗在研究二项概率的近似计算时, 提出了正态密度函数的

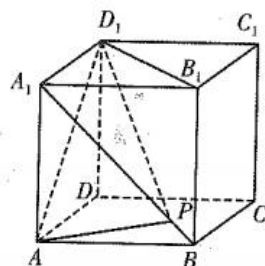
形式, 其解析式为 $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbf{R}$. 其中 $\mu \in \mathbf{R}, \sigma > 0$ 为参数. 若随机变量 X 的

概率分布密度函数为 $f(x)$, 则称随机变量 X 服从正态分布, 下列关于正态密度函数及图象的特点的说法中, 正确的有

- A. 曲线是单峰的, 它关于直线 $x=\mu$ 对称

高二数学第2页(共6页)

- B. 曲线在 $x = \mu$ 处达到峰值 $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$
- C. 当 σ 较小时, 峰值低, 正态曲线“矮胖”, 表示随机变量 X 的分布分散; 当 σ 较大时, 峰值高, 正态曲线“瘦高”, 表示随机变量 X 的分布集中
- D. 当 $|x|$ 无限增大时, 曲线无限接近 x 轴
10. 如图, 棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 为线段 A_1B 上的动点 (不含端点), 则下列结论正确的是
- A. 平面 $AA_1P \perp$ 平面 PA_1D_1
- B. 直线 D_1P 与 AC 所成的角可能是 $\frac{\pi}{6}$
- C. 点 P 存在一个位置, 使得三棱锥 $D_1 - CDP$ 的体积为 $\frac{4}{3}$
- D. 平面 APD_1 截正方体所得的截面可能是直角三角形
11. 椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , O 为坐标原点, 以下说法正确的是
- A. 椭圆 C 的离心率为 $\frac{1}{2}$
- B. 过点 F_1 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, 则 $\triangle ABF_2$ 的周长为 8
- C. 椭圆 C 上存在点 P , 使得 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 2
- D. P 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上一点, M 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上一点, 则 $|PM|$ 的最大值为 3
12. 中华人民共和国第十九届亚运会将于 2023 年 9 月在杭州举办. 为了组建一支朝气蓬勃、训练有素的赛会志愿者队伍, 向全国人民奉献一场精彩圆满的体育盛会, 组委会欲从 6 名男志愿者, 4 名女志愿者中随机抽取 3 人聘为志愿者队的队长. 下列说法正确的是
- A. 设事件 A : “抽取的 3 人中至少有一名男志愿者”, 事件 B : “抽取的 3 人中全是男志愿者”, 则 $P(B|A) = \frac{5}{29}$
- B. 设事件 A : “抽取的 3 人中既有男志愿者, 也有女志愿者”, 则 $P(A) = \frac{9}{5}$
- C. 用 X 表示抽取的 3 人中女志愿者的人数, 则 $E(X) = \frac{6}{5}$
- D. 用 Y 表示抽取的 3 人中男志愿者的人数, 则 $D(Y) = \frac{14}{25}$



高二数学第3页(共6页)

三、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

13. 在数列 $\{a_n\}$ 中,对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 总有 $a_m + a_n = a_{m+n}$,且 $a_1 = 1$,则 $a_{2023} =$ _____.

14. 在 $(x^2 + x + y)^5$ 的展开式中, $x^3 y^3$ 的系数为_____.

15. 某学校有A, B两家餐厅,马梁同学第一天午餐时随机地选择一家餐厅用餐. 如果第一天去A餐厅,那么第二天去A餐厅的概率为0.6;如果第一天去B餐厅,那么第二天去A餐厅的概率为0.8. 则马梁同学第二天去A餐厅用餐的概率为_____.

16. 已知直线 $l: mx + y + 3m - \sqrt{3} = 0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 12$ 交于A, B两点,过A, B分别作 l 的垂线与 x 轴交于C, D两点,若 $|AB| = 2\sqrt{3}$,则 $|CD| =$ _____.

四、解答题:共70分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知数列 $\{a_n\}$, $a_1 = \frac{1}{3}$, 其前 n 项的和为 S_n , 且满足 $3S_n^2 + (1 - 3S_n) \cdot a_n = 0 (n \geq 2)$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

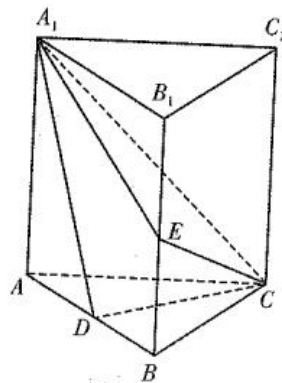
(2) 证明: $S_1 + \frac{1}{2}S_2 + \frac{1}{3}S_3 + \cdots + \frac{1}{n}S_n < \frac{2}{3}$.

18. (12分)

如图,三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中,侧面 AA_1C_1C 与侧面 C_1B_1BC 均为边长为2的正方形, D, E 分别是AB, BB_1 的中点,且 $AB = 2\sqrt{2}$.

(1) 证明: $BC_1 \parallel$ 平面 A_1CD ;

(2) 求二面角 $D - A_1C - E$ 的正切值.



19. (12分)

中心在原点的双曲线 C 的焦点在 x 轴上,且焦距为4,请从下面3个条件中选择1个补充条件,并完成后面问题:

①该曲线经过点 $P(-2, 3)$;

②该曲线的渐近线与圆 $(x - 4)^2 + y^2 = 12$ 相切;

高二数学第4页(共6页)

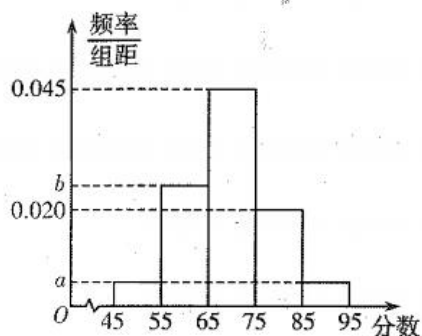
③点 M 在该双曲线上, F_1, F_2 为该双曲线的左、右焦点, 当点 M 的纵坐标为 $\frac{3}{2}$ 时, 以 F_1, F_2 为直径的圆经过点 M .

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 过定点 $Q(1, 1)$ 能否作直线 l , 使 l 与此双曲线相交于 A, B 两点, 且 Q 是弦 AB 的中点? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 说明理由.

20. (12 分)

第 24 届冬奥会于 2022 年在北京市和张家口市联合举行, 冬奥会志愿者的服务工作是成功举办的重要保障. 在冬奥会的志愿者选拔工作中, 某高校承办了冬奥会志愿者选拔的面试工作, 面试成绩满分 100 分, 现随机抽取了 100 名候选者的面试成绩分五组, 第一组 $[45, 55)$, 第二组 $[55, 65)$, 第三组 $[65, 75)$, 第四组 $[75, 85)$, 第五组 $[85, 95]$, 绘制成如图所示的频率分布直方图. 已知图中从左到右前三个组的频率成等差数列, 第一组和第五组的频率相同.



(1) 求 a, b 的值, 并估计这 100 名候选者面试成绩的平均值 (同一组中的数据用该组区间的中点值作代表) 和中位数 (中位数精确到 0.1);

(2) 已知抽取的 100 名候选人中, 男生 50 人, 且希望参加张家口赛区志愿服务的有 10 人, 女生不希望参加张家口赛区志愿服务的有 30 人, 补全下面 2×2 列联表, 试根据小概率值 $\alpha = 0.050$ 的独立性检验, 分析参加张家口赛区志愿者服务的候选人与性别是否有关?

	男生	女生	总计
希望去张家口赛区	10		
不希望去张家口赛区		30	
总计	50		

参考数据及公式: $\chi^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, $n = a + b + c + d$.

α	0.050	0.010	0.001
χ_0	3.841	6.635	10.828

高二数学第5页 (共6 页)

21. (12 分)

某企业对生产设备进行优化升级,升级后的设备控制系统由 $2k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) 个相同的元件组成,每个元件正常工作的概率均为 p ($0 < p < 1$),各元件之间相互独立.当控制系统有不少于 k 个元件正常工作时,设备正常运行,否则设备停止运行,记设备正常运行的概率为 p_k (例如: p_2 表示控制系统由 3 个元件组成时设备正常运行的概率; p_3 表示控制系统由 5 个元件组成时设备正常运行的概率).

(1) 若每个元件正常工作的概率 $p = \frac{2}{3}$.

① 当 $k=2$ 时,求控制系统中正常工作的元件个数 X 的分布列和均值;

② 计算 p_3 .

(2) 已知设备升级前,单位时间的产量为 a 件,每件产品的利润为 1 元,设备升级后,在正常运行状态下,单位时间的产量是原来的 4 倍,且出现了高端产品,每件产品成为高端产品的概率为 $\frac{1}{4}$,每件高端产品的利润是 2 元.请用 p_k 表示出设备升级后单位时间内的利润 y (单位:元),在确保控制系统中元件总数为奇数的前提下,若将该设备的控制系统增加 2 个相同的元件,请分析一下能否提高利润.

22. (12 分)

设 t 为实数,函数 $f(x) = e^x - 2x + 2t, x \in \mathbb{R}$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间与极值点;

(2) 求证:当 $t > \ln \frac{2}{e}$ 且 $x > 0$ 时, $e^x > x^2 - 2tx + 1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线