

2022—2023 学年度下学期高三第三次模拟考试试题

数学参考答案

一、1.C 2.A 3.C 4.A 5.B 6.C 7.A 8.D

二、9.ABC 10.BC 11.BD 12.ABD

三、13.39 14. $\frac{10}{10}$ 或 $-\frac{10}{10}$ 15. $\frac{16-2}{3}$ 16. $t \geq \frac{1}{e^2-1}$

四、17.解:(1)

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$,

且 $\triangle ABC$ 的面积 $S = \frac{1}{2}bc \sin A$,

由 $2S = a^2 - (b+c)^2$,得 $bc \sin A = 2bc - 2bc \cos A$,化简得 $\sin A + 2 \cos A = 2$,……2分

又 $A \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$,联立得 $5 \cos^2 A - 8 \sin A + 3 = 0$,

解得 $\cos A = \frac{3}{5}$ 或 $\cos A = 1$ (舍去)……5分

(2)由(1)得 $\sin A = \frac{4}{5}$,

$\therefore S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{2}{5}bc = 4$, $\therefore bc = 10$,……7分

由余弦定理得: $\left(\frac{b+c}{2}\right)^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \frac{3}{5}$, $\therefore (b+c)^2 - \frac{16}{5}bc = \frac{41}{4}$,

$\therefore (b+c)^2 - 32 = \frac{41}{4}$, $\therefore b+c = \frac{13}{2}$,

$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $\frac{13+\sqrt{41}}{2}$,……10分

18.解:(1)当 $n=1$ 时 $S_1 = 2a_1 - 2$,解得 $a_1 = 2$,

当 $n \geq 2$ 时 $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$,所以 $S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2 - (2a_{n-1} - 2)$,即 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$,

所以 $a_n = 2a_{n-1}$,因为 $a_1 = 2 \neq 0$,所以 $\{a_n\}$ 是以 2 为首项,2 为公比的等比数列,

所以 $a_n = 2^n$,……3分

设数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d ,由 $b_1 = 5$, $b_3 = 9$,可得 $\begin{cases} b_1 + 2d = 5 \\ b_1 + 4d = 9 \end{cases}$,解得 $\begin{cases} d = 2 \\ b_1 = 1 \end{cases}$,

所以 $b_n = 1 + (n-1) \times 2 = 2n-1$,……6分

(2)因为 $c_n = b_{a_n} = 2 \cdot 2^n - 1$,……8分

$d_n = \frac{c_n + 1}{c_n c_{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{(2^{n+1} - 1)(2^{n+2} - 1)} = \frac{1}{2^{n+1} - 1} - \frac{1}{2^{n+2} - 1}$,……10分



$$\begin{aligned} T_n &= d_1 + d_2 + \cdots + d_n \\ &= \left(\frac{1}{2^1-1} - \frac{1}{2^2-1} \right) + \left(\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}-1} - \frac{1}{2^n-1} \right) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2^n-1} \quad \cdots \cdots 12 \text{ 分} \end{aligned}$$

19. 解: (1) ∵ 直四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 被平面 α 所截, 截面为 $CDEF$,

∴ $EF \parallel CD, C_1D_1 \parallel CD, C_1D_1 = CD$ 来源: 高三数学公众号

∴ $EF = CD$

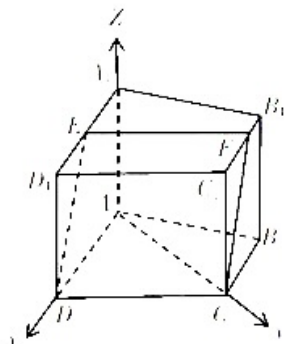
∴ $C_1D_1 \parallel EF, C_1D_1 = EF$

∴ EFC_1D_1 是平行四边形

∴ $A_1D_1 \parallel B_1C_1$

∴ $AD \parallel BC$ 4 分

(2) $\triangle ADC$ 中, 由余弦定理可得 $AC = \sqrt{3}$, 由勾股定理得



$AC \perp AD$, 又 $AA_1 \perp$ 平面 $ABCD$,

故面 AA_1AC, AD 两两垂直, 如图建系, 设 $AA_1 = h$, 则 $A(0,0,0), D(1,0,0), C(0,\sqrt{3},0), A_1$

$(0,0,h), E(\frac{1}{2}, 0, h), \overrightarrow{DC} = (-1, \sqrt{3}, 0), \overrightarrow{DE} = (-\frac{1}{2}, 0, h)$ 6 分

面 $ABCD$ 的法向量为 $\vec{n} = (0, 0, 1)$,

设面 $EFCD$ 的法向量为 $\vec{k} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{k} \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{k} \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} -x + \sqrt{3}y = 0 \\ -\frac{1}{2}x + hz = 0 \end{cases}$$

令 $x = \sqrt{3}, \vec{k} = \left(\sqrt{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2h} \right)$, 依题: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}||\vec{k}|} \Rightarrow h = 1$ 8 分

设面 AA_1F 的法向量为 $\vec{m} = (x, y, z), \overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1)$,

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$ 得 $F(-\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 1), \overrightarrow{AF} = (-\frac{1}{2}, \sqrt{3}, 1)$

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0 \\ \vec{m} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} z = 0 \\ -\frac{1}{2}x + \sqrt{3}y + z = 0 \end{cases}$$

令 $y = 1, \vec{m} = (2, \sqrt{3}, 1, 0)$ 10 分

直线 DE 与平面 AA_1F 所成角为 θ

$$\sin \theta = |\cos(\overrightarrow{DE}, \vec{m})| = \left| \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{13} \cdot \frac{5}{4}} \right| = \frac{2\sqrt{195}}{65}$$

直线 DE 与平面 AA_1F 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{195}}{65}$ 12 分

20. 解: (1) 补全的 2×2 列联表如下:

	经常使用	偶尔或不用	总计
男性	70	30	100
女性	90	10	100
总计	160	40	200

由列联表可得

$$K^2 = \frac{200 \times (70 \times 10 - 30 \times 90)^2}{100 \times 100 \times 160 \times 40} = \frac{25}{2} = 12.5 > 7.879,$$

所以能在犯错误的概率不超过 0.005 的前提下认为经常使用该款 App 与性别有关. ……4 分

(2) 由 2×2 列联表可知, 抽取到经常使用该款 App 的市民的频率为 $\frac{160}{200} = 0.8$

将频率视为概率, 所以从该市民中任意抽取 1 人, 恰好抽取到经常使用该款 App 的市民的
概率为 0.8, 由题意知 $X \sim B(10, 0.8)$, 来源: 高三答案公众号

所以 $E(X) = 10 \times 0.8 = 8$, $D(X) = 10 \times 0.8 \times 0.2 = 1.6$. ……8 分

(3) 由题意, 因为 $E(\eta) = 100 \times 0.8 = 80 > 5$,

$D(\eta) = 100 \times 0.8 \times 0.2 = 16 > 5$, 所以近似为 $\eta \sim N(80, 16)$, 所以 $P(68 \leq \eta \leq 92) = P(80 - 3 \times 4 \leq \eta \leq 80 + 3 \times 4) \approx 0.9974$. ……12 分

21. 解: (1) 设点 P 的坐标为 (x, y) , 因为 $k_{PQ} \cdot k_{PR} = -\frac{1}{2}$,

所以 $\frac{y-1}{x-\sqrt{2}} \cdot \frac{y+1}{x+\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, 整理得 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$,

所以圆锥曲线 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$. ……4 分

(2) ① 易知 $m \neq 0$, 且直线 l 与 y 轴的交点为 $T(0, -\frac{\sqrt{2}}{m})$,

设直线 l 交椭圆于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = mx + \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases}, \text{ 得 } (m^2 + 2)y^2 + 2\sqrt{2}my - 2 = 0,$$

所以 $\Delta = 8m^2 + 8m^2 + 2 = 16m^2 + 2 > 0$,

所以 $y_1 + y_2 = -\frac{2\sqrt{2}m}{m^2 + 2}$, $y_1 y_2 = -\frac{2}{m^2 + 2}$. ……6 分

又 $\overline{TA} = \lambda_1 \overline{TF}$, 可得 $(x_1, y_1 + \frac{\sqrt{2}}{m}) = \lambda_1(1, 2 - y_1 - y_2)$,

所以 $\lambda_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{my_1}$,

又 $\overline{TB} = \lambda_2 \overline{TF}$, 同理可得 $\lambda_2 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{my_2}$,



所以 $\lambda_1 + \lambda_2 = -2 - \frac{\lambda_2^2}{m} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right)$,

因为 $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} = -\frac{2 + \frac{2m}{m^2 + 2}}{-\frac{m^2 + 2}{2}} = \sqrt{2}m$,

所以 $\lambda_1 + \lambda_2 = -2 - \frac{\lambda_2^2}{m} \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \right) = -2 - \frac{\lambda_2^2}{m} \cdot \sqrt{2}m = -4$,

故 $\lambda_1 + \lambda_2$ 的值是定值, 且 $\lambda_1 + \lambda_2 = -4$, ……8 分

2 若 $m=0$, 则直线 l 为 $x=\sqrt{2}$, 此时四边形 $ABCD$ 为矩形, 根据对称性可知直线 AG 与 BD 相交于 E, K 的中点 N , 易知 $N(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$, ……9 分

若 $m=0$, 由题意, 可知 $D(2, 2), A(2\sqrt{2}, 2)$,

所以直线 AG 的方程为 $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{2\sqrt{2} - x_1}(x - 2\sqrt{2})$,

当 $x = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时, $y = y_2 + \frac{y_2 - y_1}{2\sqrt{2} - x_1}(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{2(2\sqrt{2} - x_1)(y_2 - \sqrt{2}(y_2 - y_1))}{2(2\sqrt{2} - x_1)}$

$\frac{2(2\sqrt{2} - my_1 - \frac{\sqrt{2}}{2})y_2 - \sqrt{2}(y_2 - y_1)}{2(2\sqrt{2} - x_1)} = \frac{\sqrt{2}(y_2 + y_1) - 2my_1 y_2}{2(2\sqrt{2} - x_1)} = \frac{2\sqrt{2} \times (-\frac{2 + \frac{2m}{m^2 + 2}}{m^2 + 2}) - 2m \times (-\frac{2}{m^2 + 2})}{2(2\sqrt{2} - x_1)} = \frac{-4m + 4m}{2(2\sqrt{2} - x_1)(m^2 + 2)} = 0$,

所以点 $N(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$ 在直线 AG 上,

同理可知, 点 $N(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$ 也在直线 BD 上,

所以 $m=0$ 时, 直线 AG 与 BD 也相交于定点 $N(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$, ……11 分

综上所述, m 变化时, 直线 AG 与 BD 相交于定点 $N(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0)$, ……12 分

22. 解: (1) 当 $a=1$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{x}$,

$\therefore f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} = 0$, 得 $x=1$

$\therefore$ 存在平行于 x 轴的切线, 切点为 $(1, e)$

$\therefore$ 切线方程为 $y=e$, ……3 分

(2) $\because x>0, a>0$,

$\therefore g(x) = f(x) - cx - a \ln x$ 恰有两个零点 $\Leftrightarrow$ 方程 $\frac{e^x}{x^a} = e \ln e^x - \ln x^a = e \ln \frac{e^x}{x^a}$ 有两个不等的实数

解,

令 $t = \frac{e^x}{x^a} > 0$, 则 $t = e \ln t$, ……5 分

令 $h(t) = e \ln t - t$, 则 $h'(t) = \frac{e}{t} - 1$.

∴ 当 $0 < t < e$ 时, $h'(t) > 0$; 当 $t > e$ 时, $h'(t) < 0$.

∴ 函数 $h(t)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减.

∵ $h(e) = 0$, ∴ 方程 $t = e \ln t$ 有唯一解 $t = e$.

∴ 方程 $\frac{e'}{x^2} = e \ln \frac{e'}{x^2}$ 有两个不等的实数解 $\Leftrightarrow$ 方程 $e = \frac{e'}{x^2}$ 有两个不相等的实数解.

$\Leftrightarrow$ 方程 $a \ln x = x - 1$ 有两个不相等的实数解, ……8 分

令 $k(x) = a \ln x - x + 1$, 则 $k'(x) = \frac{a}{x} - 1$.

∵ $a > 0$, ∴ 当 $0 < x < a$ 时, $k'(x) > 0$; 当 $x > a$ 时, $k'(x) < 0$.

∴ 函数 $k(x)$ 在 $(0, a)$ 上单调递增, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减.

∵ $x \rightarrow 0^+$, $k(x) \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow +\infty$, $k(x) \rightarrow -\infty$.

∴ 需要 $k(a) = a \ln a - a + 1 > 0$, 即 $\ln a + \frac{1}{a} - 1 > 0$, ……10 分

令 $m(a) = \ln a + \frac{1}{a} - 1$, 则 $m'(a) = \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}$.

∴ 当 $0 < a < 1$ 时, $m'(a) < 0$; 当 $a > 1$ 时, $m'(a) > 0$.

∴ 函数 $m(a)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

∵ $m(1) = 0$, ∴ 当 $a = 1$ 时, $\ln a + \frac{1}{a} - 1 > 0$ 恒成立.

∴ a 的取值范围为 $(0, 1) \cup (1, +\infty)$, ……12 分

【高中数学答案】



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线