参考答案及解析

一、选择题

1. D 2. A 3. C 4. C 5. C 6. D 7. C 8. A

二、选择题

9. AB 10. BC 11. BCD 12. ABD

三、填空题

13. 10

14. $\left[-\frac{3}{2},9\right]$

15. 3

16. $\frac{9}{4}$

四、解答题

17. **解**:(1)因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5n-4}{5n+1}$,$a_1=1$,

所以当 $n\geq 2$ 时,$\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{6}$,$\frac{a_3}{a_2}=\frac{6}{11}$,$\frac{a_4}{a_3}=\frac{11}{16}$,…,$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{5n-9}{5n-4}$. (2分)

所以当 $n\geq 2$ 时,$\frac{a_n}{a_1}=\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{6}\times\frac{6}{11}\times\frac{11}{16}\times\cdots\times\frac{5n-9}{5n-4}=\frac{1}{5n-4}$,所以 $\frac{1}{a_n}=5n-4$;(4分)

当 $n=1$ 时,$a_1=1$ 满足上式,

所以 $\frac{1}{a_n}=5n-4(n\in\mathbf{N}^*)$. (5分)

(2)由(1)可得 $b_n=\frac{1}{\left(\frac{1}{a_n}+4\right)\left(\frac{1}{a_n}+14\right)}=\frac{1}{5n\cdot(5n+10)}=\frac{1}{50}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$, (7分)

所以 $T_n=\frac{1}{50}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{50}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{50}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{50}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{50}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3n^2+5n}{100(n+1)(n+2)}$. (10分)

18. (1)**证明**:在 $\triangle ABC$ 中,由 $a-b=2b\cos C$ 及正弦定理得 $\sin A-\sin B=2\sin B\cos C$.

又 $A=\pi-(B+C)$,

所以 $\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$, (2分)

即 $\sin B\cos C+\cos B\sin C-\sin B=2\sin B\cos C$, (3分)

$\sin B\cos C+\cos B\sin C-2\sin B\cos C=\sin B$,

所以 $\sin(C-B)=\sin B$. (4分)

又 $C-B\in(-\pi,\pi)$,$B\in(0,\pi)$,

所以 $C-B=B$ 或 $(C-B)+B=\pi$(舍),

所以 $C=2B$. (6分)

(2)**解**:由 $C=2B$ 得 $B+C=3B\in(0,\pi)$,

所以 $0<B<\frac{\pi}{3}$,所以 $\frac{1}{2}<\cos B<1$. (7分)

由题意 $a=b+2b\cos C$,$C=2B$ 及正弦定理得:

$\frac{a+c}{b}=\frac{b+2b\cos C+c}{b}=\frac{\sin B+2\sin B\cos C+\sin C}{\sin B}$

$=\frac{\sin B+2\sin B\cos C+\sin 2B}{\sin B}$

$=\frac{\sin B+2\sin B\cos C+2\sin B\cos B}{\sin B}=1+2\cos C+2\cos B$

$=1+2\cos 2B+2\cos B=1+2(2\cos^2 B-1)+2\cos B$

$=4\cos^2 B+2\cos B-1=4\left(\cos B+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{4}$. (10分)

因为 $\frac{1}{2}<\cos B<1$,所以 $1<4\left(\cos B+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{5}{4}<5$,

即 $1<\frac{a+c}{b}<5$,故 $\frac{a+c}{b}$ 的取值范围为 $(1,5)$. (12分)

19. **解**:(1)设事件 A 为"核酸检测呈阳性",事件 B 为"患疾病". (1分)

由题意可得 $P(A)=0.02$,$P(B)=0.003$,$P(A|B)=0.98$. (2分)

由条件概率公式 $P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$ 得:$P(AB)=0.98\times 0.003$,

即 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{0.98\times 0.003}{0.02}=0.147$. (5分)

故该居民可以确诊为新冠肺炎患者的概率为 14.7%. (5分)

(2)设方案二中每组的检测次数为 X,则 X 的取值为 1,6,

$P(X=1)=(1-0.02)^5=0.98^5\approx 0.904$,

$P(X=6)=1-0.98^5\approx 0.096$, (6分)

所以X的分布列为

X	1	6
P	0.904	0.096

所以$E(X)\approx1\times0.904+6\times0.096=1.48$。

即方案一检测的总次数的期望为$11\times1.48=16.28$。(8分)

设方案二中每组的检测次数为Y，则Y的取值为1，12，

$P(Y=1)=(1-0.02)^{11}\approx0.801$，

$P(Y=12)=1-0.801\approx0.199$，(9分)

所以Y的分布列为 来源：高三答案公众号

Y	1	12
P	0.801	0.199

所以$E(Y)\approx1\times0.801+12\times0.199=3.189$。

即方案二检测的总次数的期望为$3.189\times5=15.945$。(11分)

由$16.28>15.945$，则方案二的工作量更少。(12分)

20.(1)证明：如图所示：

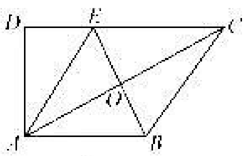


图1

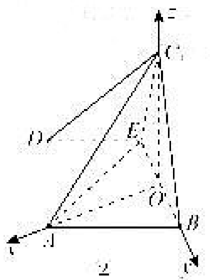


图2

在图1中，连接AC，交BE于O。

因为四边形ABCE是边长为2的菱形，且$\angle BCE=60°$，

所以$AC\perp BE$，且$OA=OC=\sqrt{3}$。(1分)

在图2中，相交直线OA，OC均与BE垂直，

所以$\angle AOC$是二面角$A-BE-C$的平面角。(2分)

因为$AC=\sqrt{6}$，所以$OA^2+OC^2=AC^2$，所以$OA\perp OC$。(3分)

所以平面$BCE\perp$平面ABED。(4分)

(2)解：由(1)知，分别以直线OA，OB，OC为x，y，z轴建立如图2所示的空间直角坐标系，

则$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，$C(0,0,\sqrt{3})$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$B(0,1,0)$，$E(0,-1,0)$，

所以$\overrightarrow{DC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2},\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{AD}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{3}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},0,\sqrt{3})$，$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{3},-1,0)$。(6分)

设$\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{DC}$，$\lambda\in[0,1]$，

则$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+\lambda\overrightarrow{DC}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\lambda,\sqrt{3}\lambda\right)$。(7分)

设平面ABC的一个法向量$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0,\\-\sqrt{3}x+\sqrt{3}z=0,\end{cases}$取$\boldsymbol{n}=(1,\sqrt{3},1)$。

因为P到平面ABC的距离为$\frac{\sqrt{15}}{5}$，

所以$d=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}\lambda|}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$，解得$\lambda=\frac{1}{2}$。(9分)

则$\overrightarrow{AP}=\left(-\frac{3\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，所以$\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AE}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$。(10分)

设直线EP与平面ABC所成的角为θ，

所以$\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{EP},\boldsymbol{n}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{EP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{EP}||\boldsymbol{n}|}=\frac{\sqrt{15}}{5}$。(12分)

21.解：(1)由已知$M(a,0)$，$N(0,b)$，$F(c,0)$，

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MF}=(-a,b)\cdot(c-a,0)=a^2-ac=-1$。(2分)

因为$\angle NMF=120°$，则$\angle NMO=60°$，

所以$b=\sqrt{3}a$，所以$c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$。(3分)

解得$a=1$，$b=\sqrt{3}$，所以W的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$。(4分)

(2)直线l的斜率存在且不为0，设直线$l:y=kx+2$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$。

由$\begin{cases}y=kx+2,\\x^2-\frac{y^2}{3}=1,\end{cases}$得$(3-k^2)x^2-4kx-7=0$，

则$\begin{cases}3-k^2\neq 0,\\ \Delta=16k^2+28(3-k^2)>0,\\ x_1+x_2=\dfrac{4k}{k^2-3}>0,\\ x_1x_2=\dfrac{7}{k^2-3}>0,\end{cases}$

解得$\sqrt{3}<k<\sqrt{7}$． （3分）

因为点$H(7,0)$在以线段AB为直径的圆的外部，则$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}>0$．

$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}=(x_1-7,y_1)\cdot(x_2-7,y_2)=(x_1-7)(x_2-7)+y_1y_2=(1+k^2)x_1x_2-(7+2k)(x_1+x_2)+53$

$=(1+k^2)\cdot\dfrac{7}{k^2-3}-(7+2k)\cdot\dfrac{4k}{k^2-3}+53$

$=\dfrac{7k^2+7-28k-8k^2+53k^2-159}{k^2-3}>0$，

解得$k>2$．

由(1)(2)得实数k的范围是$2<k<\sqrt{7}$． （8分）

由$\lambda=\dfrac{S_{\triangle QAH}}{S_{\triangle QBH}}=\dfrac{|AQ|}{|BQ|}$，因为$B$在$A$，$Q$之间，

则$\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{QB}$，且$\lambda>1$．

所以$(x_1,y_1+2)=\lambda(x_2,y_2+2)$，则$x_1=\lambda x_2$． （9分）

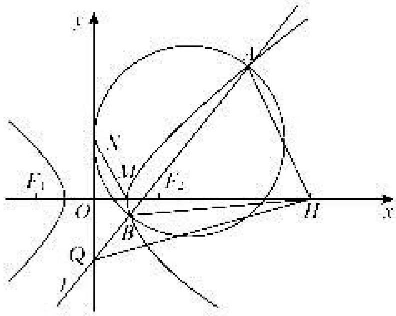
所以$\begin{cases}(1+\lambda)x_2=\dfrac{4k}{k^2-3},\\ \lambda x_2^2=\dfrac{7}{k^2-3},\end{cases}$则$\dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda}=\dfrac{16}{7}\cdot\dfrac{k^2}{k^2-3}$

$=\dfrac{16}{7}\left(1+\dfrac{3}{k^2-3}\right)$． （10分）

因为$2<k<\sqrt{7}$，所以$4<\dfrac{(1+\lambda)^2}{\lambda}<\dfrac{64}{7}$．

又$\lambda>1$，所以$1<\lambda<7$．

故λ的取值范围是$(1,7)$． （12分）



22.(1)解：$f'(x)=\dfrac{\lambda}{\lambda x+1}-\lambda+x=\dfrac{\lambda x\left[x-\left(\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\right)\right]}{\lambda x+1}$， （1分）

若$\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\leqslant 0$，即$0<\lambda\leqslant 1$，$f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$在区间$(0,+\infty)$单调递增，故$f(x)\geqslant f(0)=0$，满足条件；（2分）

若$\lambda-\dfrac{1}{\lambda}>0$，即$\lambda>1$，当$x\in\left(0,\lambda-\dfrac{1}{\lambda}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，则$f(x)<f(0)=0$，矛盾，不符合题意．（3分）

综上，λ的取值范围为$(0,1]$． （4分）

(2)证明：先证右侧不等式，如下：

由(1)可得：当$\lambda=1$时，有$f(x)=\ln(x+1)-x+\dfrac{x^2}{2}>0$，

则$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x^2}>0$，

即$\ln(x+1)-\ln x>\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}$，

即$2\ln(x+1)-2\ln x>\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$， （6分）

则有$2\ln(n+1)=[2\ln(n+1)-2\ln n]+[2\ln n-2\ln(n-1)]+\cdots+(2\ln 2-2\ln 1)>\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n-1}-\dfrac{1}{(n-1)^2}+\cdots+\dfrac{2}{1}-\dfrac{1}{1^2}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2}{i}-\dfrac{1}{i^2}\right)$，

即$2\ln(n+1)>\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2}{i}-\dfrac{1}{i^2}\right)$，右侧不等式得证．（7分）

下证左侧不等式，如下：

构造$g(x)=\ln(x+1)-x(x>0)$，

则$g'(x)=-\dfrac{x}{x+1}<0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

故$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减，则$g(x)<g(0)=0$，

即$\ln(x+1)<x(x>0)$，可得$\ln\left(\dfrac{1}{x}+1\right)<\dfrac{1}{x}$，

即$\ln(x+1)-\ln x<\dfrac{1}{x}$． （8分）

则有$\ln(n+1)=[\ln(n+1)-\ln n]+[\ln n-\ln(n-1)]+\cdots+(\ln 2-\ln 1)<\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}+\cdots+\dfrac{1}{1}$，

即$\ln(n+1)<\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}+\cdots+\dfrac{1}{1}$．

因为$\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{4}{4n^2}<\dfrac{4}{4n^2-1}=2\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，

则$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}<1+2\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)<\dfrac{5}{3}$． （10分）

故$2\ln(n+1)-\dfrac{5}{3}<2\left(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n-1}+\cdots+\dfrac{1}{1}\right)-\left(\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2}{i}-\dfrac{1}{i^2}\right)$，左侧得证．（11分）

综上所述，不等式$2\ln(n+1)-\dfrac{5}{3}<\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{2}{i}-\dfrac{1}{i^2}\right)<2\ln(n+1)$成立． （12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线