

树德中学高2021级高二下期5月阶段性测试数学(理科)试题

命题人:肖兴佳 审题人:李小蛟、唐颖君、王钊

一、选择题:本大题共12个小题,每小题5分,共60分.每小题只有一项是符合题目要求的

1. 已知  $A = \{-3, 0, 1\}$ ,  $B = \{-4, -3, 1\}$ , 则  $A \cup B$  的真子集的个数为 ( )

- A. 3                      B. 7                      C. 15                      D. 31

2. 若条件  $p: -1 < b < 1$ , 条件  $q: -2 < b < 2$ , 则  $p$  是  $q$  的 ( )

- A. 必要而不充分条件                      B. 充分而不必要条件  
C. 充要条件                      D. 既不充分也不必要条件

3. 已知  $a$  为实数, 复数  $z = (a^2 - 1) + (a + 1)i$  为纯虚数, 则  $\frac{a + i^3}{1 + i} = ( )$

- A. 1                      B.  $i$                       C.  $-i$                       D.  $1 - i$

4. 对具有线性相关关系的变量  $x, y$ , 有一组观测数据  $(x_i, y_i) (i = 1, 2, 3, \dots, 8)$ , 其回归方程为  $\hat{y} = \frac{1}{6}x + a$ , 且  $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_8 = 6$ ,  $y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_8 = 9$ , 则实数  $a$  的值是 ( )

- A.  $-2$                       B.  $2$                       C.  $-1$                       D.  $1$

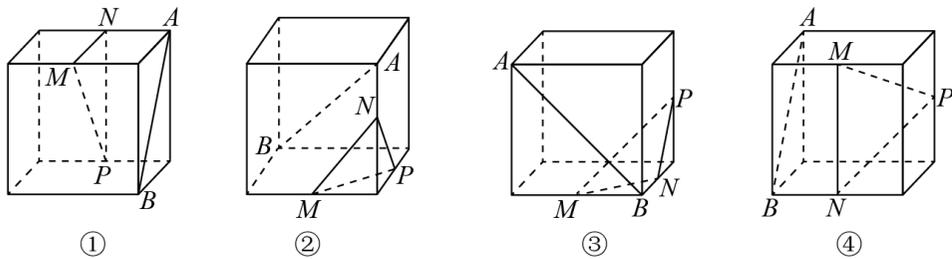
5. 执行如图所示的程序框图后, 输出的值为4, 则  $p$  的取值范围是 ( )

- A.  $\frac{7}{8} < p < \frac{15}{16}$                       B.  $p > \frac{15}{16}$   
C.  $\frac{7}{8} \leq p < \frac{15}{16}$                       D.  $\frac{3}{4} < p \leq \frac{7}{8}$

6. 用数学归纳法证明不等式  $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1 (n \geq 2)$  的过程中, 由  $n = k$  递推到  $n = k + 1$  时不等式左边 ( )

- A. 增加了项  $\frac{1}{3(k+1)+1}$   
B. 增加了项  $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$   
C. 增加了项  $\frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} - \frac{2}{3k+3}$   
D. 以上均不对

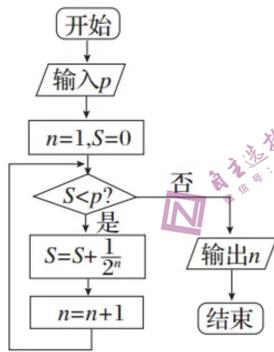
7. 下列各图中,  $A, B$  为正方体的两个顶点,  $M, N, P$  分别为其所在棱的中点, 能得出  $AB \parallel$  平面  $MNP$  的图形的序号是 ( )



- A. ①③                      B. ②③                      C. ①④                      D. ②④

8. 若函数  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 2a \ln x$  有两个不同的极值点, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $(-\infty, 2]$                       B.  $(0, 2]$                       C.  $(0, 2)$                       D.  $(2, +\infty)$



9. 已知双曲线  $C: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1 (b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 圆  $(x - 1)^2 + y^2 = \frac{3}{4}$  与  $C$  的渐近线相切.

$P$  为  $C$  右支上的动点, 过  $P$  作两渐近线的垂线, 垂足分别为  $A, B$ . 给出以下结论:

- ①  $C$  的离心率  $e = 2$ ;                      ② 两渐近线夹角为  $30^\circ$ ;  
③  $|PA| \cdot |PB|$  为定值  $\frac{3}{4}$ ;                      ④  $|AB|$  的最小值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

则所有正确结论为 ( )

- A. ①②                      B. ①③                      C. ③④                      D. ①③④

10. 若对于任意的  $a \in \mathbf{R}$  及任意的  $x \in (1, +\infty)$ , 不等式  $a^2 + x \geq 2a + k \ln(x - 1)$  恒成立, 则实数  $k$  的取值范围是 ( )

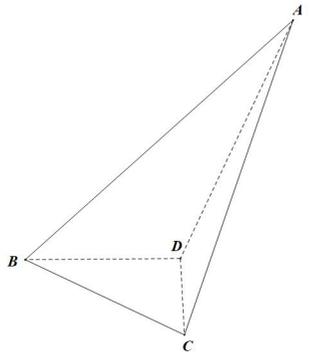
- A.  $[0, e]$                       B.  $[0, 1]$                       C.  $[\frac{1}{e}, +\infty)$                       D.  $(-\infty, \frac{1}{e})$

11. 已知实数  $a > 0, b > 0, a \neq 1$ , 且满足  $a \cdot \ln b = a^2 - 1$ , 则下列判断正确的是 ( )

- A.  $a^2 > b$                       B.  $a^2 < b$   
C.  $\log_a b > 2$                       D.  $\log_a b < 2$

12. 在三棱锥  $A - BCD$  中, 平面  $ABD \perp$  平面  $BCD, AB = 2, BC = 1, AC = \sqrt{3}, BD = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \angle DBC = 45^\circ$ , 则此三棱锥的外接球的表面积为 ( )

- A.  $\frac{7\pi}{2}$                       B.  $\frac{14\pi}{3}$   
C.  $\frac{13\pi}{6}$                       D.  $\frac{13\pi}{4}$



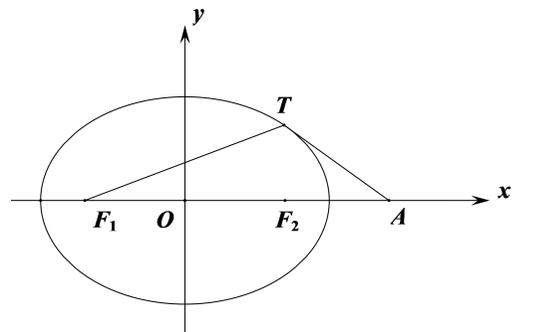
二、填空题:本大题共4个小题,每小题5分,共20分.

13. 已知点  $A$  是曲线  $\rho = 2\cos\theta$  上任意一点, 则点  $A$  到直线  $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 4$  的距离的最小值是 \_\_\_\_\_

14. 设变量  $x, y$  满足:  $\begin{cases} y \geq x \\ x + 3y \leq 4 \\ x \geq -2 \end{cases}$ , 则  $z = |x - 3y|$  的最大值为 \_\_\_\_\_.

15. 在区间  $[0, 4]$  上随机取两个实数  $x, y$ , 则  $xy \in [0, 4]$  的概率是 \_\_\_\_\_.

16. 椭圆  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过点  $A(2, 0)$  作椭圆的切线, 切点为  $T$ , 若  $M$  为  $x$  轴上的点, 且满足  $\angle ATM = \angle AF_1T$ , 则点  $M$  的坐标为 \_\_\_\_\_.



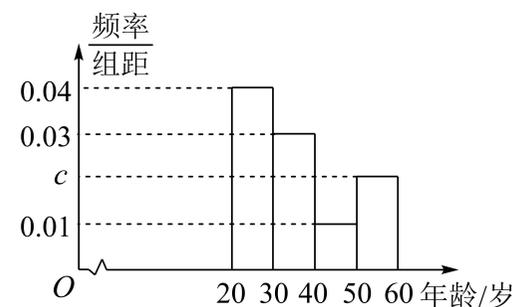
三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 已知函数  $f(x) = x^3 - x^2 - x + c$ .

- 求函数  $f(x)$  的单调区间；
- 设函数  $g(x) = [f(x) - x^3] \cdot e^x$ ，若函数  $g(x)$  在  $x \in [-3, 2]$  上单调递增，求实数  $c$  的取值范围.

18. 某市为了宣传环保知识，举办了一次“环保知识知多少”的问卷调查活动（一人答一份）. 现从回收的年龄在 20 ~ 60 岁的问卷中随机抽取了 100 份，统计结果如下面的图表所示.

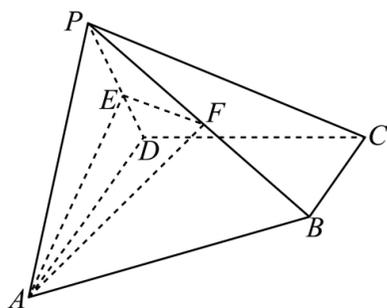
年龄分组	抽取份数	答对全卷的人数	答对全卷的人数占本组的概率
[20, 30)	40	28	0.7
[30, 40)	$n$	27	0.9
[40, 50)	10	4	$b$
[50, 60]	20	$a$	0.1



- 分别求出  $n, a, b, c$  的值；
- 从年龄在 [40, 60] 答对全卷的人中随机抽取 2 人授予“环保之星”，求年龄在 [50, 60] 的人中至少有 1 人被授予“环保之星”的概率.

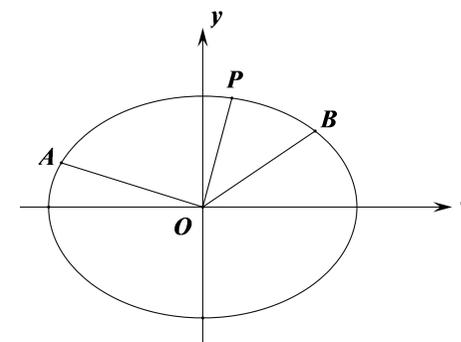
19. 如图，在四棱锥  $P-ABCD$  中， $CD \perp$  平面  $PAD$ ， $\triangle PAD$  为等边三角形， $AD \parallel BC$ ， $AD = CD = 2BC = 2$ ， $E, F$  分别为棱  $PD, PB$  的中点.

- 求平面  $AEF$  与平面  $PAD$  所成锐二面角的余弦值；
- 在棱  $PC$  上是否存在点  $G$ ，使得  $DG \parallel$  平面  $AEF$ ？若存在，确定点  $G$  的位置；若不存在，说明理由.



20. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ， $A, B, P$  是椭圆上的三个不同的点， $O$  为坐标原点，记  $\triangle AOP, \triangle BOP, \triangle AOB$  的面积为  $S_{\triangle AOP}, S_{\triangle BOP}, S_{\triangle AOB}$ .

- 若  $\vec{OA} = (x_1, y_1), \vec{OB} = (x_2, y_2)$ ，求证： $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$ ；
- 记直线  $OA, OB$  的斜率为  $k_1, k_2$ ，当  $k_1 k_2 = -\frac{1}{4}$  时，试比较  $S_{\triangle AOP}^2 + S_{\triangle BOP}^2$  与  $S_{\triangle AOB}^2$  的大小并说明理由.



21. 设函数  $f(x) = ax^3 + x (a \in \mathbf{R})$ .

- 若直线  $y = 2x - 1$  是函数  $y = f(x)$  图象的一条切线，求实数  $a$  的值；
- 若  $a > 0$ ，当  $x > 0$  时，不等式  $2x - 6a \sin x < f(x)$  恒成立，求实数  $a$  的取值范围；
- 当  $n \geq 2$  时，求证： $2 \sin \frac{1}{2} + 3 \sin \frac{1}{3} + 4 \sin \frac{1}{4} + \dots + n \sin \frac{1}{n} > n + \frac{1}{6n} - \frac{7}{6}$ .

22. 在直角坐标系中，以原点为极点， $x$  轴的正半轴为极轴，以相同的长度单位建立极坐标系.

已知直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 3$ ，曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho = 4a \cos \theta (a > 0)$ .

- 设  $t$  为参数，若  $y = 2\sqrt{3} + \frac{1}{2}t$ ，求直线  $l$  的参数方程；
- 已知直线  $l$  与曲线  $C$  交于  $P, Q$ ，设  $M(0, -2\sqrt{3})$ ，且  $|PQ|^2 = |MP| \cdot |MQ|$ ，求实数  $a$  的值.