上饶市 2023 届第二次高考模拟考试
文科数学答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	D	C	B	B	A	D	A	B	A	A	C

1．已知集合 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{x\mid x^2<16\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$　　B．$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$　　C．$\{1,2,3\}$　　D．$\{1,2,3,4\}$

【答案】C

【详解】试题分析：由 $x^2<16$ 得 $-4<x<4$，所以 $B=\{x\mid -4<x<4\}$，因为 $A=\{1,2,3,4\}$，所以 $A\cap B=\{1,2,3\}$，故选 C.

2．若 $z=3+4i$，则 $\frac{|z|}{\overline{z}}=$（　）

A．1　　B．-1　　C．$\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i$　　D．$\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$

【答案】D

【详解】由题意可得 ：$|z|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，且：$\overline{z}=3-4i$，

据此有：$\frac{|z|}{\overline{z}}=\frac{5}{3-4i}=\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i$.

本题选择 D 选项.

3．为了支持民营企业发展壮大，帮助民营企业解决发展中的困难，某市政府采用分层抽样调研走访各层次的民营企业．该市的小型企业、中型企业、大型企业分别有 900 家、90 家、10 家．若大型企业的抽样家数是 2，则中型企业的抽样家数应该是（　）

A．180　　B．90　　C．18　　D．9

【答案】C

【详解】该市中型企业与大型企业的家数比是 9:1，由题意及分层抽样的意义得知，在中型企业中的抽样家数应该是 $9\times 2=18$.

4．已知 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\tan\alpha=3$，则 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=$（　）

A．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　　B．$\frac{2\sqrt{5}}{5}$　　C．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$　　D．$-\frac{\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【详解】由 $\tan\alpha=3$ 得 $\sin\alpha=3\cos\alpha$，又 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=\frac{1}{10}$，因为 $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{10}}{10},\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，因为 $\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\alpha\sin\frac{\pi}{4}$，所以

$\cos(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{10}}{10}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

本题选择 B 选项.

5．某路口人行道的信号灯为红灯和绿灯交替出现，红灯持续时间为 40 秒，若一名行人来到该路口遇到红灯，则至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为（　）

A．$\frac{7}{10}$　　B．$\frac{5}{8}$　　C．$\frac{3}{8}$　　D．$\frac{3}{10}$

【答案】B

【详解】因为红灯持续时间为 40 秒,所以这名行人至少需要等待 15 秒才出现绿灯的概率为 $\frac{40-15}{40}=\frac{5}{8}$，故选 B.

6．椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$，直线 $y=2$ 与椭圆 C 相切，椭圆 C 的方程为（　）

A．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$　　B．$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　C．$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$　　D．$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$

【答案】A

【详解】因为直线 $y=2$ 与椭圆 C 相切,所以 $b=2$，

由 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 $a^2=b^2+c^2$ 联立可得：$a^2=16$.

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，本题选择 A 选项.

7．《九章算术》涉及算术、代数、几何等诸多领域，书中有如下问题：“今有圆亭，下周三丈，上周二丈，高一丈．问积几何？”其意思为：“有一个圆台，下底周长为 3 丈，上底周长为 2 丈，高为 1 丈．那么该圆台的体积是多少？”已知 1 丈等于 10 尺，圆周率约为 3，估算出这个圆台体积约有（　）

A．$4\frac{3}{4}$ 立方尺　　B．$52\frac{7}{9}$ 立方尺　　C．$427\frac{3}{4}$ 立方尺　　D．$527\frac{7}{9}$ 立方尺

【答案】D

【详解】由已知得下底半径为 5 尺，下底半径为$\dfrac{10}{3}$尺.

所以圆台的体积为

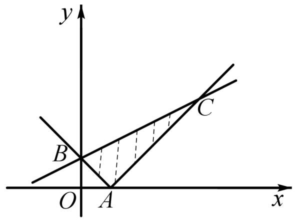
$$\frac{1}{3}(S_{上}+S_{下}+\sqrt{S_{上}S_{下}})h=\frac{1}{3}(\frac{100}{9}\pi+25\pi+\sqrt{\frac{100}{9}\times 25\pi^2})\times 10=\frac{4750}{9}=527\frac{7}{9}.$$

故选 D.

8．在坐标平面中，不等式组$\begin{cases} y\leqslant \dfrac{1}{2}x+1 \\ y\geqslant |x-1| \end{cases}$所表示的平面区域的面积为（　）

A．3　　B．$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

【答案】A

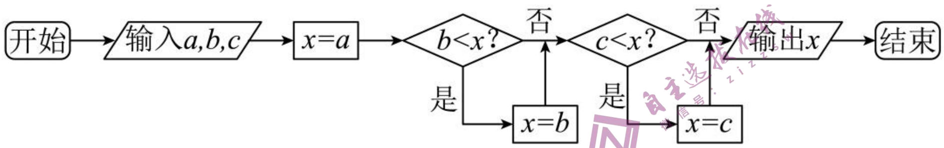


【详解】如图，作出不等式组表示的平面区域，区域中

$A(1,0),B(0,1),C(4,3)$.

所以$|AB|=\sqrt{2},|AC|=3\sqrt{2},S_{\Delta ABC}=3$.故选 A.

9．已知$a=2,b=e^{0.2},c=\dfrac{6}{5}$执行如图所示的程序框图，输出的值为（　）



A．$\dfrac{4}{5}$　　B．$\dfrac{6}{5}$　　C．$e^{0.2}$　　D．2

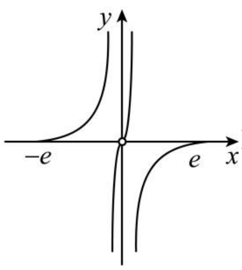
【答案】B

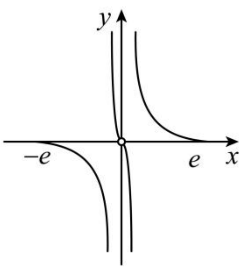
【详解】根据程序框图可知，执行程序输出的结果是a,b,c三个数中的最小值.因为

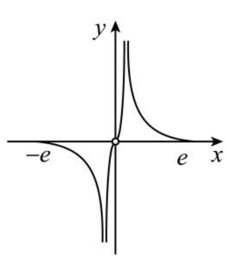
$a=2=\mathrm{e}^{\ln 2}>\mathrm{e}^{0.2}=b>1.2=c$，所以$a>b>c$，所以输出的值为$\dfrac{6}{5}$.

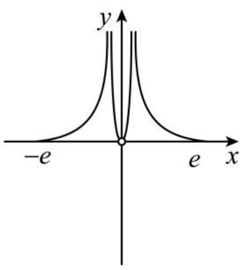
故选：B

10．函数$y=\dfrac{\ln x^2-2}{\ln x^2+2}\sin x$的部分图像大致为（　）

A．

B．

C．

D．

【答案】A

【详解】函数的定义域为$\left(-\infty,-\frac{1}{e}\right)\cup\left(-\frac{1}{e},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{e}\right)\cup\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$,

易知$y=\frac{\ln x^2-2}{\ln x^2+2}$为偶函数，$y=\sin x$为奇函数，

故函数$y=\frac{\ln x^2-2}{\ln x^2+2}\sin x$为奇函数，可排除选项 D;

当$x=1$时，$y=-\sin 1<0$，可排除选项 B、C;

故选：A

11．在△ABC中，$A=\frac{\pi}{6}$，$BC=2$，则$AC-\sqrt{3}AB$的最小值（　）

A．-4　　B．$-\sqrt{3}$　　C．2　　D．$2\sqrt{3}$

【答案】A

【详解】在△ABC中，$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=4$.

所以$AC=4\sin B, AB=4\sin C$.

所以$AC-\sqrt{3}AB=4(\sin B-\sqrt{3}\sin C)=4[\sin(\frac{5\pi}{6}-C)-\sqrt{3}\sin C]$

$=4(\frac{1}{2}\cos C+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C-\sqrt{3}\sin C)=4(\frac{1}{2}\cos C-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin C)=4\cos(C+\frac{\pi}{3})$.

$\because C\in\left(0,\frac{5\pi}{6}\right)$，$\therefore\frac{\pi}{3}<C+\frac{\pi}{3}<\frac{7\pi}{6}$.

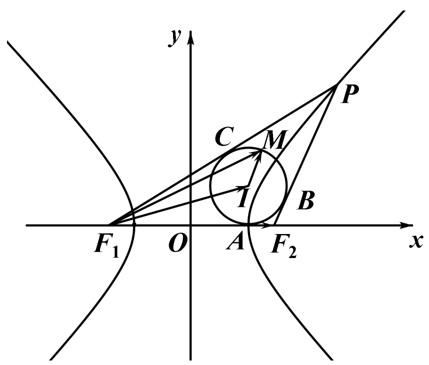
$\therefore$ $AC-\sqrt{3}AB$的最小值-4.

故选 A.

12．已知双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$P$为双曲线右支上一点，$M$为△$PF_1F_2$的内切圆上一点，则$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}$取值范围为（　）

A．$(18,42)$　　B．$(24,36)$　　C．$\left(30-6\sqrt{5},30+6\sqrt{5}\right)$　　D．$\left(6-6\sqrt{5},6+6\sqrt{5}\right)$

【答案】C



【详解】如图所示，设ΔPF_1F_2的内切圆圆心为I，内切圆与三边分别相切于点A,B,C，根据圆的切线可知：$|PB|=|PC|$，$|F_1A|=|F_1C|$，$|F_2A|=|F_2B|$，又根据双曲线定义$|PF_1|-|PF_2|=4$，即$\left(|PC|+|F_1C|\right)-\left(|PB|+|F_2B|\right)=4$，所以

$|F_1C|-|F_2B|=4$，即 $|F_1A|-|F_2A|=4$，又因为 $|F_1A|+|F_2A|=6$，所以 $|F_1A|=5$，$|F_2A|=1$，所以 A 点为右顶点，即圆心 $I(2,r)$.

考虑 P 点在无穷远时，直线 PF_1 的斜率趋近于 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，此时 PF_1 方程为 $y=\dfrac{\sqrt{5}}{2}(x+3)$，此时圆心到直线的距离为 $\dfrac{|2\sqrt{5}-2r+3\sqrt{5}|}{3}=r$，解得 $r=\sqrt{5}$，因此 ΔPF_1F_2 内切圆半径 $r\in(0,\sqrt{5})$.

$\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=(\overrightarrow{F_1I}+\overrightarrow{IM})\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=\overrightarrow{F_1I}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=|\overrightarrow{F_1A}|\cdot|\overrightarrow{F_1F_2}|+\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=30+\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}$.

又因为 $-6\sqrt{5}<\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}<6\sqrt{5}$，所以 $30-6\sqrt{5}<\overrightarrow{F_1M}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}<30+6\sqrt{5}$.

故选 C.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．已知向量 $\vec{a}=(-1,3)$，$\vec{b}=(m,0)$，若 $(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{a}$，则 $m=$________.

【答案】10

【详解】由题意得 $\vec{a}+\vec{b}=(m-1,3)$，因为 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=0$，所以 $-(m-1)+3\times3=0$，解得 $m=10$.

14．曲线 $y=2x+\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程为____________.

【答案】$x-y+2=0$

【详解】设 $y=f(x)$，则 $f'(x)=2-\dfrac{1}{x^2}$，所以 $f'(1)=2-1=1$，

所以曲线 $y=2x+\dfrac{1}{x}$ 在点 $(1,3)$ 处的切线方程为 $y-3=1\times(x-1)$，即 $y=x+2$.

15．在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，AC 与 BD 交于点 O，那么异面直线 BC_1 与 OD_1 的夹角为______.

【答案】$\dfrac{\pi}{6}$

【详解】设正方体边长为 1，连接 AD_1，则 $\angle AD_1O$ 为直线 BC_1 与直线 OD_1 夹角.

$AO=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$AD_1=\sqrt{2}$，所以 $\sin\angle AD_1O=\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$，

所以直线 BC_1 与直线 OD_1 的夹角为 $\dfrac{\pi}{6}$.

16．关于函数 $f(x)=2^{\sin x}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin x}$ 有如下四个命题：

①函数 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.　　②函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称.

③函数 $f(x)$ 的最小正周期为 2π.　　④函数 $f(x)$ 的最小值为 2.

其中所有真命题的序号是___________.

【答案】①②④

【详解】函数 $f(x)$ 的定义域为 R.

①因为 $f(-x)=2^{\sin(-x)}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin(-x)}=2^{-\sin x}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\sin x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin x}+2^{\sin x}=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，即 $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称.

②因为 $f(\dfrac{\pi}{2}-x)=2^{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}=2^{\cos x}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos x}$，

$f(\dfrac{\pi}{2}+x)=2^{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}=2^{\cos x}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\cos x}$

所以 $f(\dfrac{\pi}{2}-x)=f(\dfrac{\pi}{2}+x)$，即 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称.

③因为 $f(\pi+x)=2^{\sin(\pi+x)}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin(\pi+x)}=2^{-\sin x}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\sin x}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sin x}+2^{\sin x}=f(x)$，

所以π也为 $f(x)$ 的周期.所以③错误.

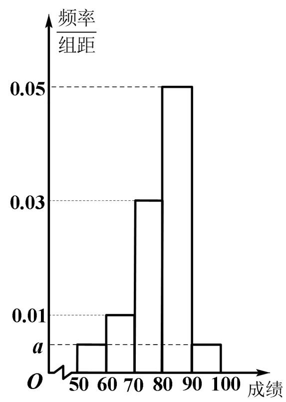
④因为 $-1\le\sin x\le 1$，令 $t=2^{\sin x}(\dfrac{1}{2}\le t\le 2)$，则有 $y=t+\dfrac{1}{t}(\dfrac{1}{2}\le t\le 2)$，因为该函数最小值为 2.

所以 $f(x)$ 的最小值为 2.

本题选择序号为①②④.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

17．某校 100 名学生期末考试化学成绩的频率分布直方图如图所示，其中成绩分组区间是：[50,60),[60,70),[70,80),[80,90),[90,100].



(1)求图中 a 的值；

(2)根据频率分布直方图，估计这 100 名学生化学成绩的平均分；

(3)若这 100 名学生化学成绩某些分数段的人数（x）与物理成绩相应分数

段的人数（y）之比如下表所示，求物理成绩在[50，90）之外的人数.

分数段	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)
x:y	1:1	1:3	3:4	5:2

【详解】（Ⅰ）由题意得 $2\times10a+0.01\times10+0.03\times10+0.05\times10=1$，解得 $a=0.005$． …4 分

（Ⅱ）由 $0.05\times55+0.1\times65+0.3\times75+0.5\times85+0.05\times95=79$．

根据频率分布直方图，估计这 100 名学生化学成绩的平均分为 79 分. …………8 分

（Ⅲ）由已知可得，

物理成绩在 $[50,90)$ 的人数为：$\left(0.05+0.1\times3+0.3\times\dfrac{4}{3}+0.5\times\dfrac{2}{5}\right)\times100=95$．

于是，物理成绩在 $[50,90)$ 之外的人数为：$100-95=5$． …………12 分

18．设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{2n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$．

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

【详解】（1）当 $n=1$ 时，$a_1=1$． …………1 分

数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+\dfrac{a_2}{3}+\ldots+\dfrac{a_n}{2n-1}=\dfrac{3^n-1}{2}$．

当 $n\ge2$ 时，$a_1+\dfrac{a_2}{3}+\ldots+\dfrac{a_{n-1}}{2n-3}=\dfrac{3^{n-1}-1}{2}$． …………2 分

$\therefore \dfrac{a_n}{2n-1}=3^{n-1}$ ．

$\therefore a_n=(2n-1)3^{n-1}$． …………5 分

当 $n=1$ 时，$a_1=1$，上式也成立.

$\therefore a_n=(2n-1)3^{n-1}(n\in N^*)$. …………6 分

（2）当 $n\ge2$ 时，$S_n=1+3\times3+5\times3^2+\cdots+(2n-1)3^{n-1}$①.

$3S_n=1\times3+3\times3^2+5\times3^3+\cdots+(2n-1)3^n$②. …………7 分

由①-②得：$-2S_n=1+3\times(3+3^2+\cdots+3^{n-1})-(2n-1)3^n$.

$-2S_n=1+3\times(3^{n-1}-1)-(2n-1)3^n=-2-2(n-1)3^n$.

$S_n=(n-1)3^n+1$. …………10 分

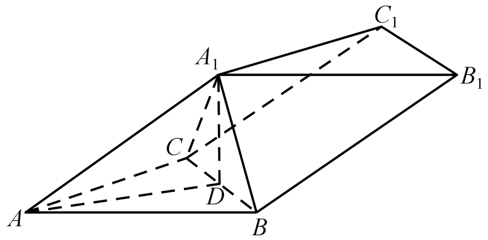
当 $n=1$ 时, $S_1=1$,上式也成立.

$\therefore S_n=(n-1)3^n+1(n\in N^*)$.　…………12 分

19．如图，已知三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 的底面是正三角形，$AB=AA_1=2$，$\angle A_1AB=\angle A_1AC$，$D$ 是 BC 的中点.

（1）证明：平面 $A_1AD\perp$ 平面 ABC；

（2）若 $\cos\angle A_1AB=\frac{3}{4}$，求点 A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离.



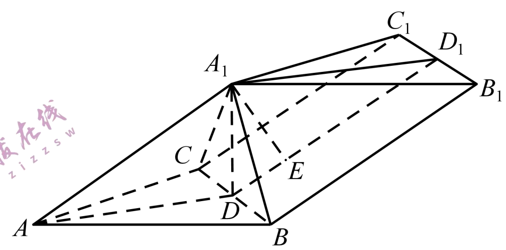
【详解】

（1）证明：$\because\angle A_1AB=\angle A_1AC$，$AB=AC$，$AA_1=AA_1$.

$\therefore\triangle A_1AB\cong\triangle A_1AC$.

$\therefore A_1B=A_1C$，又 $\because D$ 是 BC 的中点.

$\therefore A_1D\perp BC$.　…………3 分



由已知 $\triangle ABC$ 是正三角形，且 D 是 BC 的中点.

$\therefore AD\perp BC$，又 $\because A_1D\cap AD=D$.

$\therefore BC\perp$ 平面 A_1AD.　…………5 分

$\because BC\subset$ 平面 ABC

$\therefore$ 平面 $A_1AD\perp$ 平面 ABC.　…………6 分

（2）解：作 B_1C_1 中点 D_1，连接 DD_1.

$\because D$ 与 D_1 分别是 BC，B_1C_1 的中点，四边形 BCC_1B_1 是平行四边形.

$\therefore DD_1/\!/BB_1$ 且 $DD_1=BB_1$，又 $\because BB_1/\!/AA_1$ 且 $BB_1=AA_1$.

$\therefore AA_1/\!/DD_1$ 且 $AA_1=DD_1$.

$\therefore$ 四边形 A_1ADD_1 是平行四边形，

又由（1）可知 $BC\perp$ 平面 A_1ADD_1，则有平面 $A_1ADD_1\perp$ 平面 BCC_1B_1.

过 A_1 作 $A_1E\perp DD_1$ 交 DD_1 于点 E.

$\therefore A_1E\perp$ 平面 BCC_1B_1.　…………9 分

在$\triangle A_1AB$中，$AB=AA_1=2$，$\cos\angle A_1AB=\dfrac{3}{4}$，

$\therefore A_1B=\sqrt{AA_1^2+AB^2-2AA_1\cdot AB\cos\angle A_1AB}=\sqrt{2}$，又$A_1B=A_1C=\sqrt{2}$，$BC=2$.

$\therefore A_1D=1$.

$\because$在$\triangle A_1DD_1$中，$DD_1=2$，$A_1D_1=AD=\sqrt{3}$.

$\therefore A_1D^2+A_1D_1^2=DD_1^2$，即$A_1D\perp A_1D_1$.

$\therefore A_1E=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$\therefore$点A_1到平面BCC_1B_1的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.　　…………12 分

20．已知函数$f\left(x\right)=e^x-x-1$.

（1）证明：$f\left(x\right)\geqslant 0$；

（2）当$m\leqslant 1$时，证明不等式$e^x-mx+\cos x-2\geqslant 0$，在$x\in\left[0,+\infty\right)$上恒成立.

【详解】

（1）证明：

$f'\left(x\right)=e^x-1$，　…………1 分

当$x\geqslant 0$时，$f'\left(x\right)\geqslant 0$，$f\left(x\right)$单调递增；…………2 分

当$x<0$时，$f'\left(x\right)<0$，$f\left(x\right)$单调递减，…………3 分

$f\left(x\right)\geqslant f\left(x\right)_{\min}=f\left(0\right)=0$，…………5 分

故$e^x-x-1\geqslant 0$，当且仅当$x=0$时取等号，

$\therefore f\left(x\right)\geqslant 0$.　…………6 分

（2）证明：令$g\left(x\right)=e^x-mx+\cos x-2$，$g'\left(x\right)=e^x-m-\sin x$，…………7 分

$\because e^x\geqslant x+1,m\leqslant 1,x\in\left[0,+\infty\right)$.

$\therefore g'\left(x\right)=e^x-m-\sin x\geqslant x+1-m-\sin x\geqslant x-\sin x$.　…………8 分

令$h\left(x\right)=x-\sin x,x\in\left[0,+\infty\right)$.

$\because h'(x)=1-\cos x\geqslant 0.$

$\therefore$函数 $h(x)=x-\sin x$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递增，

$\therefore h(x)\geqslant h(x)_{\min}=h(0)=0$． …………9 分

$\therefore g'(x)\geqslant 0$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立，即函数 $g(x)$ 在 $x\in[0,+\infty)$ 上单调递增. ……10 分

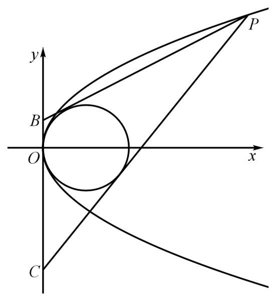
$\therefore g(x)\geqslant g(x)_{\min}=g(0)=0$.

故当 $m\leqslant 1$ 时，不等式 $e^x-mx+\cos x-2\geqslant 0$，在 $x\in[0,+\infty)$ 上恒成立. …………12 分

21．已知抛物线 C： $y^2=2px(p>0)$ 过点 $A(1,2)$．

（1）求抛物线 C 的方程，并求其准线方程；

（2）如图，点 $P(x_0,y_0)$ $(x_0>4)$ 是抛物线 C 上的动点，点 B、C 在 y 轴上，圆Γ：$(x-2)^2+y^2=4$ 内切于△PBC.求△PBC 面积的最小值.



【详解】

（1）$\because y^2=2px(p>0)$ 过点 $A(1,2)$，$\therefore 2p=4$，解得 $p=2$. …………2 分

$\therefore$抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，其准线方程为 $x=-1$. …………4 分

（2）设 $B(0,b)$、$C(0,c)$.

过点 P 且与圆Γ相切的直线 l：$y-y_0=k(x-x_0)$ $(k\neq 0)$. …………5 分

由圆心 $(2,0)$ 直线 l 的距离为 2 可得：$\dfrac{|k(2-x_0)+y_0|}{\sqrt{k^2+1}}=2$，

即 $(x_0{}^2-4x_0)k^2+2y_0(2-x_0)k+y_0{}^2-4=0$ ． …………6 分

设 k_1 与 k_2 是上面方程的两个根，则可令 k_1 与 k_2 分别为直线 PB 与直线 PC 的斜率.

$\therefore k_1+k_2=\dfrac{2y_0(x_0-2)}{x_0{}^2-4x_0},k_1k_2=\dfrac{y_0{}^2-4}{x_0{}^2-4x_0}$． …………7 分

又$\because b=y_0-k_1x_0$，$c=y_0-k_2x_0$.

$\therefore |BC|=|k_2-k_1|x_0$，则 $S_{\Delta PBC}=\dfrac{1}{2}x_0|BC|=\dfrac{1}{2}x_0{}^2|k_2-k_1|=\dfrac{1}{2}x_0{}^2\sqrt{(k_2+k_1)^2-4k_1k_2}$.

…………8 分

又∵

$$(k_1+k_2)^2-4k_1k_2=\left[\frac{2y_0(x_0-2)}{x_0{}^2-4x_0}\right]^2-4\frac{y_0{}^2-4}{x_0{}^2-4x_0}=\frac{16\left(y_0{}^2+x_0{}^2-4x_0\right)}{\left(x_0{}^2-4x_0\right)^2}=\frac{16}{\left(x_0-4\right)^2}.$$

…………9 分

$$\therefore S_{\triangle PBC}=\frac{2x_0{}^2}{x_0-4}=2\frac{(x_0-4)^2+8(x_0-4)+16}{x_0-4}=2\left(x_0-4+\frac{16}{x_0-4}+8\right)\geq 32.$$

当且仅当 $x_0-4=4$ 即 $x_0=8$ 时，上式取等号.…………10 分

因此当 $x_0=8$， $y_0=\pm4\sqrt{2}$ 时，△PBC 面积的最小值为 32. ………12 分

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4−4：坐标系与参数方程]（10 分）

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{2t^2}{1+t^2},\\ y=\dfrac{2t}{1+t^2}\end{cases}$（$t$ 为参数），以坐标原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，直线 l 的极坐标方程为 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta+1=0$.

（1）求 C 和 l 的直角坐标方程；

（2）求 C 上的点到 l 距离的最小值.

【详解】

（1）因为 $0\leq\dfrac{2t^2}{1+t^2}<2$，且 $(x-1)^2+y^2=\left(\dfrac{t^2-1}{1+t^2}\right)^2+\dfrac{4t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=1$，

所以C的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1(0\leq x<2)$. …………3分（定义域未答对得2分）

l 的直角坐标方程为 $x-y+1=0$.　　…………5分

（2）由（1）可设C的参数方程为 $\begin{cases}x=1+\cos\alpha,\\ y=\sin\alpha\end{cases}$（$\alpha$ 为参数，$0<\alpha<2\pi$）.……6分

C上的点到 l 的距离为 $\dfrac{|1+\cos\alpha-\sin\alpha+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+2}{\sqrt{2}}$.…………8分

当$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$时，$\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)+2$取得最小值$2-\sqrt{2}$，…………9分

故C上的点到l距离的最小值为$\sqrt{2}-1$．　…………10分

23．[选修 4−5：不等式选讲]（10 分）

已知函数$f(x)=11-|x-a^2-4|-|x-4a|$．

（1）当$a=1$时，求不等式$f(x)\geqslant 0$的解集．

（2）若$f(x)\leqslant 2$，求a的取值范围．

【详解】

(1)当$a=1$时，$f(x)=\begin{cases}2x+2, x\le 4,\\ 10, 4<x\le 5,\\ -2x+20, x>5.\end{cases}$　…………2 分

可得$f(x)\ge 0$的解集为$\{x|-1\le x\le 10\}$．　…………5 分

(2) $f(x)\le 2$等价于$|x-a^2-4|+|x-4a|\ge 9$．　…………6 分

因为$|x-a^2-4|+|x-4a|\ge|a^2-4a+4|=(a-2)^2$．　…………7 分

故当$(a-2)^2\ge 9$即$|a-2|\ge 3$时，$f(x)\le 2$．

所以当$a\le -1$或$a\ge 5$时，$f(x)\le 2$．　…………8 分

当$-1<a<5$时，$(a-2)^2<9$．

所以a的取值范围是$(-\infty,-1]\cup[5,+\infty)$．…………10 分