绵阳市高中2020级第一次诊断性考试

理科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．

BDABC　　BBCDA　　DC

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13．2　　14．31　　15．10.5　　16．(−2，1)

三、解答题：本大题共6小题，共70分．

17．解：（1）$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\cos^2 x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\dfrac{\cos 2x+1}{2}=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{1}{2}$．……4分

令$\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$)，……6分

解得$\dfrac{\pi}{3}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{6}+k\pi$ ($k\in\mathbf{Z}$)，

∴函数$f(x)$的单调递减区间为$[\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{6}+k\pi]$($k\in\mathbf{Z}$)．……8分

（2）由$f(x)=-1$，得$\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})=-\dfrac{1}{2}$，

∵$x\in[0,\ \pi]$，∴$2x-\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}]$．……9分

∴$2x-\dfrac{\pi}{6}=-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}$，……11分

解得$x=0,\ \dfrac{2\pi}{3},\ \pi$．……12分

18．解：（1）证明：∵$a_{n+2}+4a_n=5a_{n+1}$，$n\in\mathbf{N}^*$，

∴$a_{n+2}-a_{n+1}=4(a_{n+1}-a_n)$，$n\in\mathbf{N}^*$，

即$\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{a_{n+1}-a_n}=4$．……3分

∵$a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_2=1$，∴$a_2-a_1=\dfrac{1}{2}$，……4分

∴数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以$\dfrac{1}{2}$为首项，4为公比的等比数列．……6分

（2）由（1）知，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\times 4^{n-1}=2^{2n-3}$，……8分

∴$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=2^{2n-5}+2^{2n-7}+2^{2n-9}+\cdots+2^{-1}+2^{-1}$．……11分

当 n=1 时，$a_1=\frac{1}{3}(2^{-1}+1)=\frac{1}{2}$.

综上所述，$a_n==\frac{1}{3}(2^{2n-3}+1)\,(n\in N^*)$. ……………………………………12 分

19．**解**：（1）$\because a\cdot\cos B=b(1+\cos A)$，

由正弦定理，得 $\sin A\cdot\cos B=\sin B(1+\cos A)$，………………………………1 分

即 $\sin A\cdot\cos B-\cos A\cdot\sin B=\sin B$，

$\therefore \sin(A-B)=\sin B$，……………………………………………………3 分

$\therefore A-B=B$ 或 $(A-B)+B=\pi$（舍），即 $A=2B$，………………………………4 分

$\therefore C=\pi-A-B=\pi-3B$，

$\therefore \sin C=\sin(\pi-3B)=\sin 3B$. ……………………………………………6 分

（2）由锐角△ABC，可得 $0<B<\frac{\pi}{2}$，$0<A=2B<\frac{\pi}{2}$，$0<C=\pi-3B<\frac{\pi}{2}$.

即 $\frac{\pi}{6}<B<\frac{\pi}{4}$，$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}<\cos B<\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………9 分

$\because \frac{c}{a}=\frac{\sin C}{\sin A}=\frac{\sin 3B}{\sin 2B}=\frac{\sin 2B\cdot\cos B+\cos 2B\cdot\sin B}{\sin 2B}=2\cos B-\frac{1}{2\cos B}$. ………11 分

$\therefore \frac{c}{a}\in(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{2\sqrt{3}}{3})$. ……………………………………………12 分

20．**解**：由题意得 $f'(x)=x^2-(k+4)x+4k=(x-4)(x-k)$. ……………………………1 分

（1）当 $k=4$ 时，由 $f'(x)=(x-4)^2\geq 0$，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

当 $k>4$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(4,k)$ 上单调递减，

在 $(-\infty,4)$ 和 $(k,+\infty)$ 上单调递增. …………………………3 分

当 $k<4$ 时，易知函数 $f(x)$ 在 $(k,4)$ 上单调递减，

在 $(-\infty,k)$，$(4,+\infty)$ 上单调递增. ………………………5 分

（2）当 $k\leqslant 0$ 或 $k\geqslant 3$ 时，函数 $f(x)$ 在(0，3)上为单调函数，最多只有一个零点.

当 $0<k<3$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,k)$ 上单调递增，在 $(k,3)$ 上单调递减. …………7 分

要使函数 $f(x)$ 在(0，3)上有两个零点，则需满足：

$0<k<3$ 且 $\begin{cases}f(k)>0,\\ f(0)<0,\\ f(3)<0,\end{cases}$ 解得 $1<k<\frac{13}{9}$. ……………………………………9 分

$\therefore f_{\min}(x)=\min\{f(0),f(3)\}$. ……………………………………………10 分

又 $f(3)-f(0)=\frac{15}{2}k-9$，

$\therefore$ 当 $k>\frac{6}{5}$ 时， $f(3)>f(0)$；当 $k<\frac{6}{5}$ 时， $f(3)<f(0)$.

又 $\frac{6}{5}<\frac{13}{9}$ ，$\therefore f_{\min}(x)=\begin{cases}-\frac{11}{6},\frac{6}{5}\leqslant k<\frac{13}{9},\\ \frac{15k}{2}-\frac{65}{6},1<k<\frac{6}{5}.\end{cases}$ ……………………………………12 分

21．**解**：（1）由题意得 $f'(x)=2e^{x}-2x-a$.

令 $g(x)=2e^{x}-2x-a$ ，则 $g'(x)=2e^{x}-2>0$.

$\therefore$ 函数 $f'(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，

则函数 $f'(x)$ 的最小值为 $f'(0)=2-a$. ………………………………………………………3 分

①当 $2-a\geqslant0$，即 $a\leqslant2$ 时，可得 $f'(x)\geqslant f'(0)\geqslant0$，

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增.

又 $f(0)=0$，$\therefore f(x)\geqslant f(0)=0$ 恒成立. ……………………………………………………4 分

②当 $2-a<0$，即 $a>2$ 时，函数 $f'(x)$ 的最小值为 $f'(0)=2-a<0$，

且存在 $x_0>0$，当 $x\in[0,\ x_0)$ 时，$f'(x)<0$.

又 $f(0)=0$，$\therefore$ 当 $x\in[0,\ x_0)$ 时，$f(x)<0$，

这与 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant0$ 相矛盾. ……………………………………………………5 分

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$. ……………………………………………………6 分

（2）由(1) 得当 $a=2$ 时，不等式 $f(x)=2e^{x}-x^{2}-2x-2\geqslant0$ 恒成立，

$\therefore 2e^{x}-1\geqslant x^{2}+2x+1$.

令 $x=n$，得 $2e^{n}-1\geqslant n^{2}+2n+1$. ………………………………………………………8 分

$\therefore \frac{2}{2e^{n}-1}\leqslant\frac{2}{n^{2}+2n+1}<\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$. ……………………………………9 分

令 $h(x)=\ln x-x+1$，则 $h'(x)=\frac{1-x}{x}$，

$x\in(0,\ 1)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 为 $(0,\ 1)$ 上的增函数；

$x\in(1,\ +\infty)$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 为 $(1,\ +\infty)$ 上的增函数；

$\therefore h(x)\le h(1)=0$，则 $\ln x\leqslant x-1$.

$\therefore \ln(1+\frac{2}{2e^{n}-1})<\frac{2}{2e^{n}-1}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}$， ……………………………………10 分

$\therefore \ln(1+\frac{2}{2e-1})(1+\frac{2}{2e^{2}-1})(1+\frac{2}{2e^{3}-1})\cdots(1+\frac{2}{2e^{n}-1})$

$=\ln(1+\frac{2}{2e-1})+\ln(1+\frac{2}{2e^2-1})+\ln(1+\frac{2}{2e^3-1})\cdots+\ln(1+\frac{2}{2e^n-1})$

$<(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})=\frac{3}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

$<\ln e^{\frac{3}{2}}=\ln\sqrt{e^3}<\ln\sqrt{25}=\ln 5$.

$\therefore (1+\frac{2}{2e-1})(1+\frac{2}{2e^2-1})(1+\frac{2}{2e^3-1})\cdots(1+\frac{2}{2e^n-1})<5$. ……………………………12 分

22．解：（1）由题意得圆 C 的普通方程为 $(x-3)^2+y^2=9$.

直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y+6=0$. ……………………………………………………4 分

$\because$ 圆心 C 到直线 l 的距离 $d=\frac{3\sqrt{3}+6}{2}>3$，

$\therefore$ 直线 l 和圆 C 相离. ……………………………………………………………………5 分

（2）设 $P(3+3\cos\theta, 3\sin\theta)$ $(\theta\in[0, 2\pi))$.

由 $\frac{|3\sqrt{3}\cos\theta-3\sin\theta+6+3\sqrt{3}|}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore |2\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)+2+\sqrt{3}|=\sqrt{3}$，则 $\cos(\frac{\pi}{6}+\theta)=-1$. ……………………………7 分

$\therefore \frac{\pi}{6}+\theta=\pi$，则 $\theta=\frac{5\pi}{6}$， ……………………………………………………8 分

$\therefore P(3-\frac{3\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$， ……………………………………………………………9 分

$\therefore \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}=-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………………………10 分

23．解：（1）$f(x)=|x+2|+\left|x+\frac{1}{2}\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$

$\geqslant\left|(x+2)-(x+\frac{1}{2})\right|+\left|x+\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}+\left|x+\frac{1}{2}\right|$ ……………………………3 分

$\geqslant\frac{3}{2}$.（当且仅当 $x=-\frac{1}{2}$ 时，取等）………………………………………4 分

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的最小值为 $\frac{3}{2}$. ……………………………………………………………5 分

（2）$\because f(a)+f(b)+f(c)=18$，

$\therefore a+b+c=3$. ……………………………………………………………………………6 分

由 $(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})=1+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+1+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+1$

$=(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{c}{a}+\frac{a}{c})+(\frac{c}{b}+\frac{b}{c})+3\geqslant 9$，

得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant 3$． ……………………………………………………8 分

$\because (a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$，

$\therefore a^2+b^2+c^3\geqslant 3$． ……………………………………………………9 分

$\therefore (\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})(a^2+b^2+c)\geqslant 9$，

$\therefore \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a^2+b^2+c^2}$． ……………………………………………………10 分