2019—2020 年度“四省八校联盟”高三联考·理数

参考答案、提示及评分细则

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	A	A	D	B	D	C	C	A	C	B	C

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 5　　14. 5　　15. $\frac{100}{101}$　　16. $[4\sqrt{2}-\sqrt{17},4\sqrt{2}+\sqrt{17}]$

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 解析：(1) 因为 $\tan C=-\tan(A+B)=-\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}=-3$ ……………………………… 6 分

(2) 由 (1) 知 C 为钝角，所以 C 为最大角

因为 $\tan A=\frac{4}{3}$，所以 $\sin A=\frac{4}{5}$，又 $\tan C=-3$，所以 $\sin C=\frac{3\sqrt{10}}{10}$ ……………………………… 9 分

由正弦定理得：$\frac{5}{\frac{4}{5}}=\frac{c}{\frac{3\sqrt{10}}{10}}$，所以 $c=\frac{15\sqrt{10}}{8}$ 为最大边. ……………………………………………… 12 分

18. 解析：(1) 2×2 列联表：

	年龄低于 50 岁的人数	年龄不低于 50 岁的人数	合计
支持	40	20	60
不支持	20	20	40
合计	60	40	100

……………………………………………………………………………………………… 2 分

$K^2=\frac{100\times(40\times20-20\times20)^2}{60\times40\times60\times40}\approx2.778<3.841$ ……………………………………………………… 5 分

所以没有 95% 的把握认为以 50 岁为分界点对“新农村建设”政策的支持度有差异. ………… 6 分

(2) 由题可知，ξ 可取 0，1，2，3，4，且观众支持“新农村建设”的概率为 $\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$，因此 $\xi\sim B(4,\frac{3}{5})$

$P(\xi=0)=C_4^0(\frac{2}{5})^4=\frac{16}{625}$,$P(\xi=1)=C_4^1(\frac{3}{5})^1(\frac{2}{5})^3=\frac{96}{625}$

$P(\xi=2)=C_4^2(\frac{3}{5})^2(\frac{2}{5})^2=\frac{216}{625}$,$P(\xi=3)=C_4^3(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^1=\frac{216}{625}$

$P(\xi=4)=C_4^4(\frac{3}{5})^4=\frac{81}{625}$ ………………………………………………………… 9 分

ξ 分布列如下:

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{16}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{216}{625}$	$\frac{81}{625}$

…………………………………………………………………………………… 10 分

所以 ξ 的数学期望 $E(\xi)=4\times\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$ ………………………………………… 12 分

19. 解析:(1)证明:因为 $\angle BAP=90°$,则 $PA\perp AB$,又侧面 $PAB\perp$ 底面 $ABCD$,

面 $PAB\cap$ 面 $ABCD=AB$,$PA\subset$ 面 PAB,则 $PA\perp$ 面 $ABCD$ ………………………… 2 分

$BD\subset$ 面 $ABCD$,则 $PA\perp BD$ 又因为 $\angle BCD=120°$,$ABCD$ 为平行四边形,

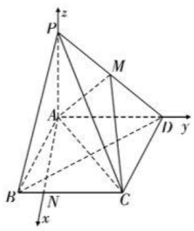
则 $\angle ABC=60°$,又 $AB=AC$ 则 $\triangle ABC$ 为等边三角形,则 $ABCD$ 为菱形,则 $BD\perp AC$ …………… 4 分

又 $PA\cap AC=A$,则 $BD\perp$ 面 PAC,$BD\subset$ 面 PBD,则面 $PAC\perp$ 面 PBD ………………… 6 分

(2)由平面 AMC 把四面体 $P-ACD$ 分成体积相等的两部分,则 M 为 PD 中点,

取 BC 中点 N,连接 AN,由 $AB=AC$ 知 $AN\perp BC$

由(1)知 $PA\perp$ 平面 $ABCD$,以 AN,AD,AP 为 x,y,z 轴,建立如图所示的空间直角坐标系,则 $B(\sqrt{3},-1,0)$,$C(\sqrt{3},1,0)$,$D(0,2,0)$,$P(0,0,2)$,则中点 M 为$(0,1,1)$ ……………………………………………… 8 分



设面 MPC 的法向量为 $\vec{v_1}=(x_1,y_1,z_1)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{PM}\cdot\vec{v_1}=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{v_1}=0\end{cases}$,

可取 $\vec{v_1}=(\frac{\sqrt{3}}{3},1,1)$ ………………………………………………………… 9 分

设面 MAC 的法向量为 $\vec{v_2}=(x_2,y_2,z_2)$,则 $\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{v_2}=0\\ \overrightarrow{AC}\cdot\vec{v_2}=0\end{cases}$,

可取 $\vec{v_2}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$ ……………………………………………………… 10 分

设二面角 $P-MC-A$ 的大小为 θ,则 $|\cos\theta|=\left|\frac{\vec{v_1}\cdot\vec{v_2}}{|\vec{v_1}|\cdot|\vec{v_2}|}\right|=\frac{1}{7}$, ………………………… 11 分

则二面角 $P-MC-A$ 的正弦值为$\frac{4\sqrt{3}}{7}$. ………………………………………………………… 12 分

20. 解析:(1)由题意得$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ \frac{12}{\sqrt{7+5}}=b\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$,解得 $a=4,b=2\sqrt{3},c=2$,故椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ ………… 4 分

(2)设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,直线 PQ 的方程设为 $x=my+3$,代入椭圆方程 $3x^2+4y^2=48$,

$\therefore (3m^2+4)y^2+18my-21=0$

$\therefore y_1+y_2=-\frac{18m}{3m^2+4},y_1y_2=-\frac{21}{3m^2+4}$, ………………………………………………………… 6 分

由 A,P,M 三点共线可知,$\frac{y_M}{\frac{16}{3}+4}=\frac{y_1}{x_1+4}$

$\therefore y_M=\frac{28y_1}{3(x_1+4)}$

同理可得,$y_N=\frac{28y_2}{3(x_2+4)}$ ………………………………………………………………………… 8 分

$\therefore k_1k_2=\frac{y_M}{\frac{16}{3}-3}\cdot\frac{y_N}{\frac{16}{3}-3}=\frac{9y_My_N}{49}=\frac{16y_1y_2}{(x_1+4)(x_2+4)}$ ………………………………………………… 9 分

$\because (x_1+4)(x_2+4)=(my_1+7)(my_2+7)=m^2y_1y_2+7m(y_1+y_2)+49$

$\therefore k_1k_2=\frac{16y_1y_2}{m^2y_1y_2+7m(y_1+y_2)+49}=-\frac{12}{7}$ ………………………………………………………… 12 分

21. 解析:(1)由题意,$f'(x)=x^2-ax$,当 $a=2$ 时,$f(3)=0$,$f'(x)=x^2-2x$,所以 $f'(3)=3$, …………… 2 分

因此,曲线 $y=f(x)$ 在点 $(3,f(3))$ 处的切线方程是 $y=3(x-3)$,

即 $3x-y-9=0$. ………………………………………………………………………………………… 4 分

(2)因为 $g(x)=f(x)+(x-a)\cos x-\sin x$,

所以 $g'(x)=f'(x)+\cos x-(x-a)\sin x-\cos x$

$=x(x-a)-(x-a)\sin x$

$=(x-a)(x-\sin x)$ ………………………………………………………………………………………… 6 分

令 $h(x)=x-\sin x$,则 $h'(x)=1-\cos x\geqslant 0$,

所以 $h(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

因为 $h(0)=0$,所以当 $x>0$,$h(x)>0$;当 $x<0$,$h(x)<0$. ………………………………………… 7 分

①当 $a<0$ 时,$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$,

当 $x\in(-\infty,a)$ 时,$x-a<0$,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增;

当 $x\in(a,0)$ 时，$x-a>0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$x-a>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以，当 $x=a$ 时，$g(x)$ 取到极大值，极大值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$，

当 $x=0$ 时，$g(x)$ 取到极小值，极小值是 $g(0)=-a$. ………………………… 8 分

②当 $a=0$ 时，$g'(x)=x(x-\sin x)$，

当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 单调递增；

所以，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极大值也无极小值. ………………………… 9 分

③当 $a>0$ 时，$g'(x)=(x-a)(x-\sin x)$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$x-a<0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；

当 $x\in(0,a)$ 时，$x-a<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$x-a>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增.

所以，当 $x=0$ 时，$g(x)$ 取到极大值，极大值是 $g(0)=-a$；

当 $x=a$ 时，$g(x)$ 取到极小值，极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$. ………………………… 10 分

综上所述：

当 $a<0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 和 $(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(a,0)$ 上单调递减，函数既有极大值，又有极小值，极大值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$，极小值是 $g(0)=-a$.

当 $a=0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无极值；

当 $a>0$ 时，函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,a)$ 上单调递减，函数既有极大值，又有极小值，极大值是 $g(0)=-a$，极小值是 $g(a)=-\frac{1}{6}a^3-\sin a$. ………………………… 12 分

22. 解析：(1) 曲线 C_1 的极坐标方程可以化为：$\rho^2-4\rho\sin\theta=0$，

所以曲线 C_1 的直角坐标方程为：$x^2+y^2-4y=0$，………………………… 2 分

曲线 C_2 的直角坐标方程为：$x+\sqrt{3}y-4=0$，………………………… 4 分

(2) 曲线 C_2 的参数方程可化为：$\begin{cases}x=4-\frac{\sqrt{3}}{2}t\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数)

将 C_2 的参数方程代入曲线 C_1 的直角坐标方程得到：$(4-\frac{\sqrt{3}}{2}t)^2+\frac{t^2}{4}-2t=0$

整理得：$t^2-(4\sqrt{3}+2)t+16=0$，判别式 $\Delta>0$

不妨设 A,B 的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=4\sqrt{3}+2$，$t_1t_2=16$ ………………………… 6 分

又点 $M(4,0)$，所以 $|MA|=|t_1|$，$|MB|=|t_2|$，所以 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{1}{|t_1|}+\frac{1}{|t_2|}=\frac{|t_1|+|t_2|}{|t_1t_1|}$ ……

………………………………………… 8 分

又因为 $t_1+t_2=4\sqrt{3}+2>0$，$t_1t_2=16>0$，所以 $|t_1|+|t_2|=t_1+t_2=4\sqrt{3}+2$，$|t_1t_1|=16$

$\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{4\sqrt{3}+2}{16}=\frac{2\sqrt{3}+1}{8}$ ………………………………………… 10 分

23. 解析：(1) $f(x)=\begin{cases}-2x-2,(x\leqslant-3)\\4,(-3<x<1)\\2x+2,(x\geqslant1)\end{cases}$ ………………………………………… 2 分

令 $\begin{cases}x\leqslant-3\\-2x-2\geqslant6\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant1\\2x+2\geqslant6\end{cases}$ 解得 $x\leqslant-4$ 或 $x\geqslant2$ ………………………………………… 4 分

所以解集为 $(-\infty,-4]\cup[2,+\infty)$ ………………………………………… 5 分

(2) 当 $x\leqslant-3$ 时，$f(x)-g(x)=-2x-2-x-a\geqslant0$ 恒成立，即 $3x+2+a\leqslant0$ 恒成立，即 $a\leqslant7$ ……

………………………………………… 7 分

当 $-3<x<1$ 时，$f(x)-g(x)=4-x-a\geqslant0$ 恒成立，即 $a\leqslant4-x$ 恒成立，所以 $a\leqslant3$ ………… 8 分

当 $x\geqslant1$ 时，$f(x)-g(x)=2x+2-x-a\geqslant0$ 恒成立，即 $a\leqslant x+2$，所以 $a\leqslant3$ ………………………… 9 分

综上：$a\leqslant3$ ………………………………………… 10 分