宣城市2023届高三年级第二次调研测试

高三数学参考答案

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.

题　号	1	2	3	4	5	6	7	8
答　案	A	B	A	D	B	B	C	A

二、选择题:本题共4小题,每小题5分,共20分.

题　号	9	10	11	12
答　案	AC	ACD	ACD	ABC

三、填空题(每小题5分,共20分)

13. -252　　14. $60°$　　15. $(-1,1)$　　16. $\sqrt{2}$

四、解答题

17. 解:(1)因为 S_1,S_2,S_4 成等比数列,所以有 $S_2^2=S_1S_4$,

即 $(2+d)^2=4+6d$,$\because d>0$,$\therefore d=2$

$\therefore a_n=2n-1$. …………………………………… 4分

(2)设 $b_n=a_n-8=2n-9$,则数列$\{b_n\}$为递增数列,其前4项为负值,从第5项开始为正值,

设 b_n 的前 n 项和为 P_n,

若 $n\leqslant4$,$T_n=|b_1|+|b_2|+\cdots+|b_n|=-(b_1+b_2+\cdots+b_n)=-P_n=8n-n^2$.

若 $n\geqslant5$,

$T_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=-(a_1+a_2+a_3+a_4)+(a_5+\cdots+a_n)=-P_4+(P_n-P_4)$

$=P_n-2P_4=n^2-8n+32$. …………………………………… 10分

18. 解:(1)设 AD、BC 的中点分别 E、F,连接 EF、PE、PF,因为底面 $ABCD$ 是正方形,$PB=PC$,

所以 $EF\perp BC$,$PF\perp BC$,故 $BC\perp$面 PEF,$BC\perp PE$.

而$\angle PFE$ 是二面角 $P-BC-A$ 的平面角,即

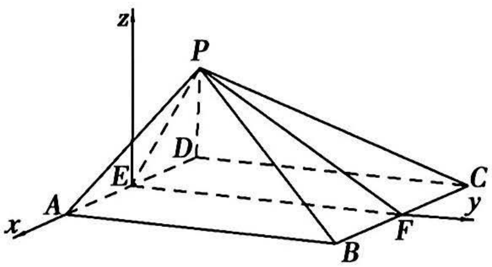
$\angle PFE=30°$,又 $EF=2$,$PF=\sqrt{3}$得 $PE=1$.

因为 $PE^2+PF^2=EF^2$,所以 $PF\perp PE$,又

$PF\cap BC=F$,故 $PE\perp$平面 PBC,

因为 $PE\subset$平面 PAD,所以平面 $PAD\perp$平面

PBC. …………………………………… 6分



(2)由(1)知平面 $PEF\perp$平面 PAD,以 E 为坐标原点,EA 为 x 轴,EF 为 y 轴,建立如图所示空间直角坐标系,则 $A(1,0,0)$,$B(1,2,0)$,$C(-1,2,0)$,$P\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

$\overrightarrow{AB}=(0,2,0),\overrightarrow{AP}=\left(-1,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\overrightarrow{PC}=\left(-1,\frac{3}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

设平面 PAB 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot n=0\\ \overrightarrow{AP}\cdot n=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}2y=0\\ -x+\frac{1}{2}y+\frac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，

令 $x=\sqrt{3}$，得 $n=(\sqrt{3},0,2)$.

设 PC 与平面 PAB 所成角为 θ，则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{PC},n>|=\left|\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{\sqrt{7}\times 2}\right|=\frac{\sqrt{21}}{7}.$

…………………………………………………………………………… 12 分

19. (1)由题意得小明恰好套中 2 次的概率 $P=\frac{5}{6}\times 2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{28}{75}$……… 4 分

(2) X 的可能取值为 0,1,2,3,4,5

$P(x=0)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{150}$　　$P(X=1)=\frac{5}{6}\times\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{30}$

$P(X=2)=\frac{1}{6}\times 2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{75}$　　$P(x=3)=\frac{5}{6}\times 2\times\frac{4}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{15}$

$P(X=4)=\frac{1}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{75}$　　$P(X=5)=\frac{5}{6}\times\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{15}$

所以 X 的分布列为

	0	1	2	3	4	5
	$\frac{1}{150}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{4}{75}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{8}{75}$	$\frac{8}{15}$

所以 $E(X)=\frac{121}{30}$ ……………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)为钝角三角形，证明如下：

由 $\frac{1-\sin A}{\cos A}=\frac{1-\cos 2B}{\sin 2B}=\frac{2\sin^2 B}{2\sin B\cos B}=\frac{\sin B}{\cos B}$，

则有 $\cos B-\sin A\cos B=\sin B\cos A$，所以 $\cos B=\sin(A+B)$，

因为 $A+B\in(0,\pi)$，所以 $\cos B=\sin(A+B)>0$，则 B 为锐角.

所以 $\cos B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)=\sin(A+B)$，所以 $\frac{\pi}{2}-B=A+B$ 或 $\left(\frac{\pi}{2}-B\right)+(A+B)=\pi.$

则 $A+2B=\frac{\pi}{2}$ 或 $A=\frac{\pi}{2}$. 由题意知 $\cos A\neq 0$，所以 $A\neq\frac{\pi}{2}$，

所以 $A+2B=\frac{\pi}{2}$，所以 $C=\pi-A-B=\frac{\pi}{2}+B\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，故 $\triangle ABC$ 为钝角三角形.

…………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知 $A+2B=\frac{\pi}{2}$，$C=\frac{\pi}{2}+B$.

由正弦定理，有$\dfrac{a^2}{c^2}-\dfrac{5a}{4c\cos B}=\dfrac{\sin^2A}{\sin^2C}-\dfrac{5\sin A}{4\sin C\cos B}$

$=\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-2B\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}+B\right)}-\dfrac{5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2B\right)}{4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+B\right)\cos B}=\dfrac{\cos^2 2B}{\cos^2B}-\dfrac{5\cos 2B}{4\cos^2B}$

$=\dfrac{(2\cos^2B-1)^2}{\cos^2B}-\dfrac{5(2\cos^2B-1)}{4\cos^2B}$

$=\dfrac{4\cos^4B-4\cos^2B+1}{\cos^2B}+\dfrac{5}{4\cos^2B}-\dfrac{5}{2}$

$=4\cos^2B+\dfrac{9}{4\cos^2B}-\dfrac{13}{2}\geqslant 2\sqrt{4\cos^2B\cdot\dfrac{9}{4\cos^2B}}-\dfrac{13}{2}=-\dfrac{1}{2}.$

当且仅当$4\cos^2B=\dfrac{9}{4\cos^2B}$时等号成立，由 B 为锐角，则 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以当 $B=\dfrac{\pi}{6}$时

取最小值$-\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1) 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{1}{2}$，即 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{2}$，

长轴长为 4，$\therefore a=2, c=1, b=\sqrt{3}$，故椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. ……………… 3 分

(2) 设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立$\begin{cases} y=kx+m \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得$(3+4k^2)x^2+8kmx+4(m^2-3)=0$，

则$\triangle=(8km)^2-16(3+4k^2)(m^2-3)=48(4k^2+3-m^2)>0$，

$x_1+x_2=\dfrac{-8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{4(m^2-3)}{3+4k^2}$， ………………………………………………… 5 分

所以 $k_{OM}k_{ON}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{(kx_1+m)(kx_2+m)}{x_1x_2}=\dfrac{k^2x_1x_2+mk(x_1+x_2)+m^2}{x_1x_2}$

$=\dfrac{4k^2(m^2-3)-8k^2m^2+m^2(3+4k^2)}{4(m^2-3)}=\dfrac{3(m^2-4k^2)}{4(m^2-3)}=-1$，

$\therefore 7m^2=12k^2+12$， ………………………………………………………………… 7 分

$\therefore |MN|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\dfrac{4\sqrt{3}\sqrt{4k^2+3-m^2}}{3+4k^2}$，

$\because$ 原点 O 到 l 的距离 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，

$\therefore S_{\triangle OMN}=\dfrac{|MN|}{2}\cdot d=\dfrac{2\sqrt{3}\sqrt{4k^2+3-m^2}|m|}{3+4k^2}=\dfrac{12}{7}\sqrt{\dfrac{16k^4+25k^2+9}{16k^4+24k^2+9}}$

$=\frac{12}{7}\sqrt{1+\frac{k^2}{16k^4+24k^2+9}}$ …………………………………………………………… 9 分

当 $k=0$ 时，$S_{\triangle OMN}=\frac{12}{7}$.

当 $k\neq 0$ 时，$S_{\triangle OMN}=\frac{12}{7}\sqrt{1+\frac{1}{16k^2+\frac{9}{k^2}+24}}$

$\because 16k^2+\frac{9}{k^2}+24\geqslant 2\sqrt{16k^2\cdot\frac{9}{k^2}}+24=48$，当且仅当 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ 时等号成立.

$\therefore \frac{12}{7}<S_{\triangle OMN}\leqslant\sqrt{3}$

综上 $\frac{12}{7}\leqslant S_{\triangle OMN}\leqslant\sqrt{3}$，所以 $\triangle OMN$ 的面积的取值范围是 $[\frac{12}{7},\sqrt{3}]$ …………… 12 分

22. 解：(1) 令 $t=\sqrt{x+1}$，$t>0$，则 $f(x)\leqslant ax$ 即 $2\ln t+t-1-a(t^2-1)\leqslant 0$，$t>0$

令 $g(t)=2\ln t+t-1-a(t^2-1)$，$t>0$，则 $g'(t)=\frac{2}{t}+1-2at=\frac{-2at^2+t+2}{t}$，$t>0$

若 $a\leqslant 0$，则 $g'(t)>0$，此时 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调递增，$g(1)=0$，所以 $t>1$ 时，$g(t)>0$，不符合题意；

若 $a>0$，则由 $g'(\ )=0$ 得 $t_0=\frac{-1-\sqrt{1+16a}}{-4a}=\frac{1+\sqrt{1+16a}}{4a}$

当 $x\in(0,t_0)$，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增；当 $x\in(t_0,+\infty)$，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减.

因为 $g(1)=0$，所以当 $t_0>1$ 或者 $t_0<1$ 时，$g(t_0)>0$，不符合题意；

当 $t_0=1$ 时，$g(t)\leqslant g(t_0)=g(1)=0$，符合题意，故 $\frac{1+\sqrt{1+16a}}{4a}=1$，解得 $a=\frac{3}{2}$.

…………………………………………………………………………………………… 6 分

(2) 要证 $0<x<1$，$\left(1+\frac{4}{x}\right)f(x)<6$. 只需证 $0<x<1$，$(x+4)f(x)-6x<0$

由 (1) 可知 $0<x<1$，$f(x)<\frac{3}{2}x$.

记 $h(x)=(x+4)f(x)-6x$，则当 $0<x<1$ 时，

$h'(x)=f(x)+(x+4)f'(x)-6<\frac{3}{2}x+(x+4)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)-6$

$=\frac{1}{2(x+1)}[3x(x+1)+(x+4)(2+\sqrt{x+1})-12(x+1)]$

$<\frac{1}{2(x+1)}\left[3x(x+1)+(x+4)\left(3+\frac{x}{2}\right)-12(x+1)\right]=\frac{x}{4(x+1)}(7x-8)<0$

因此 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调递减，又 $h(0)=0$，所以 $h(x)<0$ 即 $(x+4)f(x)-6x<0$，

故 $0<x<1$，$\left(1+\frac{4}{x}\right)f(x)<6$. …………………………………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。