

宁波市 2022 学年第二学期期末试题

高二数学试卷

说明：本试卷分第I卷（学考模拟）和第II卷（能力提升）两部分，共 150 分。

考试时间 120 分钟，本次考试不得使用计算器，请考生将所有题目都做在答题卡上。

第I卷（学考模拟 共 100 分）

一、单项选择题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分。每小题列出的四个备选项中只有一个是符合题目要求的，不选、多选、错选均不得分。）

- 已知集合 $A = \{0, 1, 2\}$ ， $B = \{-1, 0\}$ ，则 $A \cup B =$ ()
 A. $\{-1, 1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{-1, 0, 1, 2\}$
- 复数 $-1 - 2i$ (i 为虚数单位) 的虚部是 ()
 A. -2 B. -1 C. 1 D. 2
- 函数 $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ 的定义域是 ()
 A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ D. $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$
- 已知 $\tan \alpha = -1$ ， $\alpha \in (0, \pi)$ ，则 $\alpha =$ ()
 A. $\frac{5\pi}{6}$ B. $\frac{3\pi}{4}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{4}$

5. 某制药厂正在测试一种减肥药的疗效，有 1000 名志愿者服用此药，结果如下：

体重变化	体重减轻	体重不变	体重增加
人数	241	571	188

如果另有一人服用此药，估计此人体重减轻的概率是 ()

- A. 0.57 B. 0.33 C. 0.24 D. 0.19
- 已知平面向量 $\vec{a} = (x, 2)$ ， $\vec{b} = (3, 6)$ ，若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则实数 $x =$ ()
 A. -4 B. -1 C. 1 D. 4
- 已知球的半径是 3，则该球的体积是 ()
 A. 4π B. 12π C. 24π D. 36π
- 若 $\lg a (a > 0)$ 与 $\lg b (b > 0)$ 互为相反数，则 ()
 A. $a + b = 1$ B. $a - b = 0$ C. $ab = 1$ D. $\frac{a}{b} = 1$
- 取一条长度为 1 的直线段，将它三等分，去掉中间一段，留下剩下的两段；再将剩下的两段分别分割三等分，各去掉中间一段，留剩下的更短的四段；……；将这样的操作一直继续下去，直至无穷。由于在不断分割舍弃过程中，所形成的线段数目越来越多，长度越来越小，在极限的情况下，得到一个离散的点集，称为康托尔三分集。若在第 n 次操作中去掉的线段长度之和不小于 $\frac{1}{60}$ ，则 n 的最大值为 ()

(参考数据： $1.5^7 \approx 17.1$ ， $1.5^8 \approx 25.6$ ， $1.5^9 \approx 38.4$ ， $1.5^{10} \approx 57.7$)

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

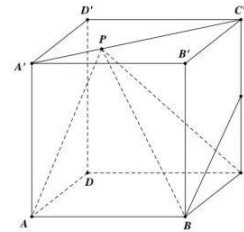
10. 设 a, b 是非零实数, 则 " $a > b$ " 是 " $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ " 的 ()
- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
11. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3, AC=2$, 若点 D 满足 $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, 则直线 AD 经过 $\triangle ABC$ 的 ()
- A. 内心 B. 外心 C. 重心 D. 垂心
12. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f\left(x + \frac{1}{2}\right)$ 为奇函数, 且对于任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(2-3x) = f(3x)$, 则下列结论中一定成立的是 ()
- A. $f(1-x) = f(x)$ B. $f(3x+1) = f(3x)$
- C. $f(x-1)$ 为偶函数 D. $f(3x)$ 为奇函数

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 每小题 4 分, 共 16 分. 每小题列出的四个备选项中有多项是符合题目要求的, 全部选对得 4 分, 部分选对且没选错得 2 分, 不选、错选得 0 分.)

13. 下列函数是增函数的是 ()
- A. $y = x^3$ B. $y = x^2$ C. $y = x^{\frac{1}{2}}$ D. $y = -x^{-1}$
14. 若平面 $\alpha \perp$ 平面 β , 且 $\alpha \cap \beta = l$, 则下列命题中错误的是 ()
- A. 平面 α 内的直线必垂直于平面 β 内的任意一条直线
- B. 平面 α 内的已知直线必垂直于平面 β 内的无数条直线
- C. 平面 α 内的任一条直线必垂直于平面 β
- D. 过平面 α 内任意一点作交线 l 的垂线, 则此垂线必垂直于平面 β
15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 以下列选项为条件, 一定可以推出 $A = \frac{\pi}{3}$ 的有 ()
- A. $a=7, b=8, c=5$ B. $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, B=\frac{\pi}{4}$
- C. $\sin B \sin C = \frac{3}{4}$ D. $2\sin^2 \frac{B+C}{2} + \cos 2A = 1$

16. 如右图, 在棱长为 2 的正方体 AC' 中, 点 E 为 CC' 的中点, 点 P 在线段 $A'C'$ (不包含端点) 上运动. 记二面角 $P-AB-D$ 的大小为 α , 二面角 $P-BC-D$ 的大小为 β , 则 ()

- A. 异面直线 BP 与 AC 所成角的范围是 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$
- B. $\tan(\alpha + \beta)$ 的最小值为 $-\frac{4}{3}$
- C. 当 $\triangle APE$ 的周长最小时, 三棱锥 $B-AEP$ 的体积为 $\frac{10}{9}$
- D. 用平面 BEP 截正方体 AC' , 截面的形状为梯形



三、填空题 (本大题共 4 小题, 每空 3 分, 共 15 分.)

17. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 0 \\ f(x-2), & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(-1) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$, $f(\log_2 3) = \underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

18. 在生活中, 我们经常可以看到这样的路障, 它可以近似地看成由一个直八棱柱、一个圆柱与一个圆台组合而成, 其中圆台的上底面直径为 4cm, 下底面直径为 40cm, 高为 80cm. 为了起到夜间行车的警示作用, 现要在圆台侧面涂上荧光材料, 则涂料部分的面积为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad} \text{cm}^2$.

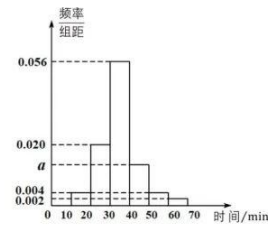


19. 已知正实数 x, y 满足 $xy - x - 2y = 0$, 则 $x + y$ 的最小值是 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

20. 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin B \sin C$, 则 $\frac{c}{b}$ 的取值范围为 $\underline{\quad \blacktriangle \quad}$.

四、解答题 (本大题共 3 小题, 共 33 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

21. (本题满分 11 分) 随着移动互联网的发展, 与餐饮美食相关的手机软件层出不穷. 现从某市使用 A 款订餐软件的商家中随机抽取 100 个商家, 对它们的“平均配送时间”进行统计, 所有数据均在 $[10, 70]$ 范围内, 得到如图所示的频率分布直方图.



(I) 求 a 的值;

(II) 试估计该市使用 A 款订餐软件的商家的“平均配送时间”的第 20 百分位数.

22. (本题满分 11 分) 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 其中 $\omega > 0$. 若 $f(x)$ 的最小正周期为 π , 且 $f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{2\pi}{3})$.

(I) 求 ω, φ 的值;

(II) 若 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 求 $f(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}]$ 上的值域.

23. (本题满分 11 分) 已知函数 $f(x) = \log_a x + ax + \frac{1}{x+1}$ ($x > 0$), 其中 $a > 1$.

(I) 若 $a = 2$, 求 $f(\frac{1}{4})$ 的值;

(II) 判断函数 $f(x)$ 的零点个数, 并说明理由;

(III) 设 $f(x_0) = 0$, 求证: $\frac{1}{2} < f(\sqrt{x_0}) < \frac{a+1}{2}$.

