2023届高三二轮复习联考(二)　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】由题可知,集合 $B=\{x|1-x>0\}=\{x|x<1\}$,又有集合 $A=\{x||x|\leqslant 2\}=\{x|-2\leqslant x\leqslant 2\}$,则 $A\cap B=\{x|-2\leqslant x<1\}$.故选 C.

2.A 【解析】$(1+\mathrm{i})(m-2\mathrm{i})=m-2\mathrm{i}+m\mathrm{i}-2\mathrm{i}^2=m+2+(m-2)\mathrm{i}$,因为复数在复平面内对应的点在第一象限,所以 $\begin{cases}m+2>0,\\ m-2>0,\end{cases}$ 解得 $m>2$.故选 A.

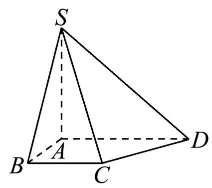
3.B 【解析】当 $a+1>b-2$ 时,取 $a=1,b=2$,则 $a<b$,所以"$a+1>b-2$"不是"$a>b$"的充分条件;当 $a>b$ 时,得 $a+1>b+1>b-2$,所以"$a+1>b-2$"是"$a>b$"的必要条件,所以"$a+1>b-2$"是"$a>b$"的必要不充分条件.故选 B.

4.B 【解析】由抛物线方程 $y=x^2$,化为标准方程 $x^2=y$,则 $2p=1,p=\frac{1}{2}$,抛物线开口向上,所以焦点坐标为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.故选 B.

5.C 【解析】$a_2=\frac{a_1}{2a_1+1}=\frac{1}{3},a_3=\frac{a_2}{2a_2+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}+1}=\frac{1}{5},a_4=\frac{a_3}{2a_3+1}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}+1}=\frac{1}{7},a_5=\frac{a_4}{2a_4+1}=\frac{\frac{1}{7}}{\frac{2}{7}+1}=\frac{1}{9}$.故选 C.

6.B 【解析】由题意,甲按 A,C,B 的顺序工作,乙工匠空闲时间最短,所需时间最短,最短时间为 $9+15+14+8=46$ h.故选 B.

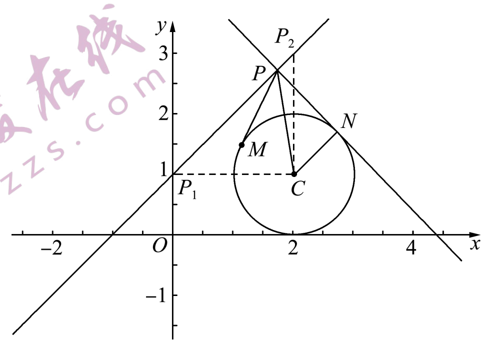
7.C 【解析】该四棱锥如图所示:



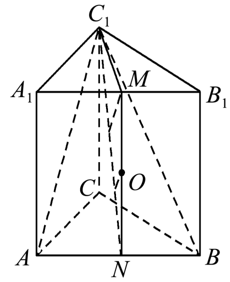
由图可知,$SA=AD=2,AB=BC=1,SA\perp$面 $ABCD,AD\perp$面 $SAB,AD/\!/BC$,所以 $\mathrm{Rt}\triangle SAB,\mathrm{Rt}\triangle SAD,\mathrm{Rt}\triangle SBC$ 中,$SB=\sqrt{5}$,$SC=\sqrt{6},SD=2\sqrt{2},CD=\sqrt{2}$,所以最长的棱长是 $2\sqrt{2}$.故选 C.

8.D 【解析】因为 $f(-x)=\cos(-2x)+|\sin(-x)|=\cos 2x+|\sin x|=f(x)$,所以 $f(x)$是偶函数,故 A 错误;因为 $\cos 2x,|\sin x|$ 的最小正周期均为 π,所以 $f(x)$的最小正周期为 π,故 B 错误;因为 $f(x)=\cos 2x+|\sin x|=1-2\sin^2x+|\sin x|=-2t^2+t+1(t=|\sin x|\in[0,1])=-2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$,当 $t=\frac{1}{4}$时,$f(x)$取得最大值,最大值为$\frac{9}{8}$,故 C 错误;当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$时,$t=|\sin x|=\sin x\in\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$,且 t 关于 x 单调递增,y 关于 t 在$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$上单调递减,所以 $f(x)$在区间$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$上单调递减,故 D 正确.故选 D.

9.C 【解析】在圆 $C:(x-2)^2+(y-1)^2=1$ 上存在两点 M,N,使得$\angle MPN=60°$,即要保证过点 P 的圆 C 的两条切线的夹角大于等于 $60°$,也即$\angle MPC\geqslant 30°$,因此点 P 与圆心 C 的距离要小于等于 2,如图,已知当点 P 的横坐标为 0 或 2 时,$|PC|$恰好为 2,因此点 P 的横坐标的取值范围为$[0,2]$.故选 C.



10.C 【解析】易知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的球心为侧面 ABB_1A_1 的中心 O,外接球半径等于正方形 ABB_1A_1 对角线的一半,$R=2\sqrt{2}$,球心 O 到平面 ABC_1 的距离等于 A_1B_1 的中点 M 到平面 ABC_1 的距离的一半,而由等面积法可求得 M 到平面 ABC_1 的距离 $h_M=\frac{C_1M\cdot MN}{C_1N}=\frac{2\times 4}{\sqrt{C_1M^2+MN^2}}=\frac{8}{2\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$,故球心 O 到平面 ABC_1 的距离 $h_o=\frac{2}{\sqrt{5}}$,因此,平面 ABC_1 截三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球所得截面的半径



$r=\sqrt{R^2-h_o^2}=\sqrt{8-\frac{4}{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$，其面积等于$\frac{36}{5}\pi$.故选 C.

11.C 【解析】当 $n=1$ 时，$4S_1=a_1^2+2a_1-8=4a_1$，即 $a_1^2-2a_1-8=0(a_1>0)$，解得 $a_1=4$ 或 $a_1=-2$(舍去).当 $n\geqslant 2$ 时，由 $4S_n=a_n^2+2a_n-8$①，得 $4S_{n-1}=a_{n-1}^2+2a_{n-1}-8(n\geqslant 2)$②，①－②得：$4a_n=a_n^2-a_{n-1}^2+2a_n-2a_{n-1}$，化简得$(a^n-a_{n-1}-2)(a_n+a_{n-1})=0$，因为 $a_n>0$，所以 $a_n-a_{n-1}-2=0$，即 $a_n=a_{n-1}+2(n\geqslant 2)$，即数列$\{a_n\}$是以 4 为首项，2 为公差的等差数列，所以 $a_n=2n+2$.当 $a_{k1}=a_1=4,a_{k2}=a_3=8$ 时，得到数列$\{a_n\}$中原次序的一列等比数列 $a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{km},\cdots,(k_1=1)$，此时的公比 $q=2$，是最小的，证明如下：$a_{k1}=a_1=4$，假若 a_{k2} 取 $a_2=6$，公比为$\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$，则 $a_{k3}=4\times\left(\frac{3}{2}\right)^2=9$ 为奇数，不可能在数列$\{a_n\}$中.由 $a_{km}=2(k_m-1)+4=4\cdot 2^{m-1}=2^{m+1}$，可得：$k_m=2^m-1$.故选 C.

12.A 【解析】设 $g(x)=f(x)-\sin x$，$\because f(x)-f(-x)=2\sin x$，即 $f(-x)=f(x)-2\sin x$，$\therefore g(-x)=f(-x)-\sin(-x)=f(x)-2\sin x+\sin x=f(x)-\sin x=g(x)$，故函数 $g(x)$是偶函数.$\because$在$[0,+\infty)$上有 $f'(x)>\cos x$，$\therefore g'(x)=f'(x)-\cos x>0$，故 $g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增，根据偶函数的对称性可知，$g(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，由 $f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-f(t)>\cos t-\sin t$ 得 $f(t)-\sin t<f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\cos t=f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$，即 $g(t)<g\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$，$\therefore |t|<\left|\frac{\pi}{2}-t\right|$，即 $t^2<\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2$，解得 $t<\frac{\pi}{4}$.故选 A.

13.$2x+y-1=0$ 【解析】由 $f(x)=xe^x-3x+1$，得 $f'(x)=(x+1)e^x-3$，$\therefore f'(0)=-2$，则曲线 $f(x)=xe^x-3x+1$ 在点$(0,1)$处的切线方程是 $y=-2x+1$.故答案为 $2x+y-1=0$.

14.6 【解析】因为$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，所以$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}$，所以$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}\right)\cdot\overrightarrow{BC}$，$\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}^2-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{2}{3}\times 6^2-6\times 6\times\frac{1}{2}=6$.故答案为 6.

15.$\frac{5}{12}$ 【解析】甲，乙两名考生选科的总情况有$(C_2^1\cdot C_4^2)^2=12^2=144$，其中恰有两门选考科目相同的情况有以下两种：(ⅰ)在物理、历史两科中选科相同：$C_2^1\cdot C_4^1\cdot A_3^2=2\times 4\times(3\times 2)=48$.(ⅱ)在物理、历史两科中选科不同：$A_2^2\cdot C_4^2=2\times\frac{4\times 3}{2\times 1}=12$，因此甲，乙两名考生恰有两门选考科目相同的概率为$\frac{48+12}{144}=\frac{60}{144}=\frac{5}{12}$.

16.$\frac{\sqrt{15}}{3}$ 【解析】如图所示，依题意可知$|OM|=a$，则 $\tan\angle MON=\tan(\pi-\angle MOF)=-\tan\angle MOF=-\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{b}{a}$，所以在 Rt$\triangle NMO$中，$|MN|=|OM|\cdot\tan\angle MON=b$，$|ON|=\sqrt{|OM|^2+|MN|^2}=\sqrt{a^2+b^2}=c$，所以$|NF|=2c$.在$\triangle MNF$ 中，因为 $\sin\angle MNF=\sqrt{7}\sin\angle MFN$，由正弦定理得，$|MF|=\sqrt{7}|MN|$，所以$|MF|=\sqrt{7}b$，又因为 $\cos\angle MNF=\cos\angle MNO=\frac{|MN|}{|ON|}=\frac{b}{c}$.在$\triangle MNF$ 中，由余弦定理得，$|MF|^2=|MN|^2+|NF|^2-2|MN|\cdot|NF|\cos\angle MNF$，即 $7b^2=b^2+4c^2-2b\cdot 2c\cdot\frac{b}{c}$，化简得 $5b^2=2c^2$，所以 $5(c^2-a^2)=2c^2$，所以 $3c^2=5a^2$，设双曲线 C 的离心率为 e，所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{5}{3}$，所以 $e=\frac{\sqrt{15}}{3}$.故答案为$\frac{\sqrt{15}}{3}$.

17.**解**：(1)由余弦定理得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，

所以 $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$，…………………………………………………………………… 1 分

由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$，………………………………………………………… 2 分

所以$\frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2-c^2}=\frac{2\sqrt{3}a^2}{2ab\cos C}=\frac{\sqrt{3}a}{b\cos C}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin B\cos C}$.

因为$\frac{\sin A}{\cos B\cos C}=\frac{2\sqrt{3}a^2}{a^2+b^2-c^2}$，

所以$\frac{\sin A}{\cos B\cos C}=\frac{\sqrt{3}\sin A}{\sin B\cos C}$.…………………………………………………………………… 4 分

又因为 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq 0$，

所以 $\dfrac{\sin B}{\cos B}=\sqrt{3}$，即 $\tan B=\sqrt{3}$. …………………………………… 5 分

又因为 $B\in(0,\pi)$，

所以 $B=\dfrac{\pi}{3}$. …………………………………… 6 分

(2)因为 $B=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为 $a+c=2\sqrt{6}a\sin C$，

所以 $(a+c)\sin B=2\sqrt{6}a\sin C\sin B$，

即 $(a+c)\sin B=3\sqrt{2}a\sin C$. …………………………………… 8 分

由正弦定理 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，所以 $b(a+c)=3\sqrt{2}ac$. …………………………………… 9 分

因为 $b=3$，所以 $a+c=\sqrt{2}ac$.

由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=a^2+c^2-ac=(a+c)^2-3ac$，…………………………………… 10 分

所以 $9=\left(\sqrt{2}ac\right)^2-3ac$，即 $2(ac)^2-3ac-9=0$，所以 $(2ac+3)(ac-3)=0$.

解得 $ac=-\dfrac{3}{2}$（舍去）或 $ac=3$. …………………………………… 11 分

所以 $S=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. …………………………………… 12 分

18.**解**：(1)当平面 $PAE\perp$ 平面 $AECD$ 时，过 P 作 $PO\perp AE$ 于 O，

因为平面 $PAE\cap$ 平面 $AECD=AE$，$PO\subset$ 平面 PAE，$PO\perp AE$，

所以 $PO\perp$ 平面 $AECD$. …………………………………… 1 分

此时四棱锥 $P-AECD$ 的高就是等边三角形 $\triangle PAE$ 的高 PO，

四棱锥 $P-AECD$ 的体积最大，…………………………………… 3 分

因为 $\triangle ABE$ 是等边三角形，所以 $\angle B=\angle AEB=\angle C=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $AE\parallel CD$，又 $AD=CD$，所以四边形 $AECD$ 是菱形.

四棱锥 $P-AECD$ 体积最大值为：

$V_{P-AECD}=\dfrac{1}{3}AB\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot S_{AECD}=\dfrac{1}{3}AB\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}\cdot AD\cdot CD\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{1}{4}$. …………………………………… 5 分

(2)解法一：由(1)知当平面 $PAE\perp$ 平面 $AECD$ 时，四棱锥 $P-AECD$ 的体积最大，连接 DO，DE.

由条件易知 $\triangle ADE$ 和 $\triangle APE$ 都是等边三角形，…………………………………… 6 分

则 $AE\perp PO$，$AE\perp DO$，$PO\cap DO=O$，PO，$DO\subset$ 面 PDO，

得 $AE\perp$ 面 PDO，$AE\perp PD$.

又 $CD\parallel AE$，$CD\subset$ 面 PCD，$AE\not\subset$ 面 PCD，

所以 $AE\parallel$ 面 PCD. …………………………………… 7 分

设平面 AEP 与平面 PCD 的交线为 l，则 $l\parallel AE$，

所以 $l\perp PD$，$l\perp PO$. …………………………………… 8 分

平面 AEP 与平面 PCD 所成角即为 PD 与 PO 所成角，…………………………………… 9 分

因为 $PO\perp DO$，$PO=DO$，所以 $\triangle PDO$ 为等腰直角三角形，…………………………………… 10 分

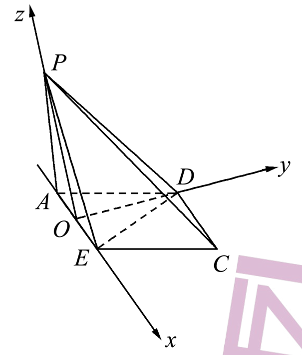
所以 PD 与 PO 所成角为 $\dfrac{\pi}{4}$，…………………………………… 11 分

即平面 AEP 与平面 PCD 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. …………………………………… 12 分

解法二：由(1)知，当平面 $PAE\perp$ 平面 $AECD$ 时，四棱锥 $P-AECD$ 的体积最大，连接 DO,DE.

由条件易知$\triangle ADE$ 和$\triangle APE$ 都是等边三角形，O 是 AE 的中点，

如图，以 AE 中点 O 为原点，OE、OD、OP 所在直线为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，…… 6 分



则 $P\left(0,0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$C\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$D\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$\overrightarrow{PD}=\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$\overrightarrow{CD}=(-1,0,0)$. …… 7 分

设平面 PCD 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{PD}=\frac{\sqrt{3}}{2}y-\frac{\sqrt{3}}{2}z=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{CD}=-x=0,\end{cases}$ …… 8 分

令 $y=1$，则 $\boldsymbol{n}_1=(0,1,1)$， …… 9 分

取平面 PAE 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$， …… 10 分

$\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$， …… 11 分

即平面 AEP 与平面 PCD 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. …… 12 分

19.**解**：(1)补全统计表如下：

	A 路线		B 路线		合计
	好	一般	好	一般	
男	10	20	55	35	120
女	90	30	20	40	180
合计	100	50	75	75	300

将所给数据整理，得到如下列联表：

性别	路线		合计
	A	B	
男	30	90	120
女	120	60	180
合计	150	150	300

$K^2=\frac{300\times(30\times60-120\times90)^2}{120\times180\times150\times150}=50>10.828$， …… 3 分

因此，在犯错误概率不超过 0.001 的前提下认为对 A,B 两条路线的选择与性别有关. …… 4 分

(2)设 p_1 为选择 A 路线好评率，$p_1=\frac{100}{150}=\frac{2}{3}$， …… 5 分

设 p_2 为选择 B 路线好评率，$p_2=\frac{75}{150}=\frac{1}{2}$， …… 6 分

设 A 路线和 B 路线累计分数分别为 X,Y.则 X,Y 的可能值都为 6,9,12,15， …… 7 分

$P(X=6)=C_3^0\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$，$P(X=9)=C_3^1\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{6}{27}$，

$P(X=12)=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{27}$，$P(X=15)=C_3^3\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$，……………………………… 8 分

$E(X)=\frac{1}{27}\times6+\frac{6}{27}\times9+\frac{12}{27}\times12+\frac{8}{27}\times15=12$，……………………………… 9 分

$P(Y=6)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，$P(Y=9)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，

$P(Y=12)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}$，$P(Y=15)=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，……………………………… 10 分

$E(Y)=\frac{1}{8}\times6+\frac{3}{8}\times9+\frac{3}{8}\times12+\frac{1}{8}\times15=10.5$，……………………………… 11 分

$\therefore E(X)>E(Y)$，选择 A 路线. ……………………………… 12 分

20.**解**：(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$，则 $2c=2\sqrt{3}$，所以 $c=\sqrt{3}$.

因为$\triangle ABF_2$ 的周长 $l=|AB|+|AF_2|+|BF_2|=|AF_1|+|AF_2|+|BF_1|+|BF_2|=2a+2a=4a$， ……………… 1 分

所以 $4a=8$，解得 $a=2$，所以 $b^2=a^2-c^2=4-3=1$，……………………………… 2 分

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……………………………… 3 分

(2)依题意可知直线 n 的斜率不为 0，其方程可设为 $x=my+1$.

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $P(4,y_1)$，$Q(4,y_2)$. ……………………………… 4 分

联立$\begin{cases}x=my+1,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$得$(m^2+4)y^2+2my-3=0$，

所以 $y_1+y_2=-\frac{2m}{m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{3}{m^2+4}$.……………………………… 5 分

因为 $S=\frac{1}{2}|PQ|\cdot(4-1)=\frac{3}{2}|y_1-y_2|=\frac{3}{2}\sqrt{(y_1-y_2)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$ ……………… 6 分

$=\frac{3}{2}\sqrt{\left(-\frac{2m}{m^2+4}\right)^2-4\left(-\frac{3}{m^2+4}\right)}=\frac{6\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}$. ……………………………… 7 分

因为 $S_1=\frac{1}{2}|PM|\cdot|y_1|=\frac{1}{2}(4-x_1)\cdot|y_1|=\frac{1}{2}[4-(my_1+1)]\cdot|y_1|=\frac{1}{2}(3-my_1)\cdot|y_1|$， ……………… 8 分

同理 $S_2=\frac{1}{2}(3-my_2)\cdot|y_2|$. ……………………………… 9 分

所以 $S_1\cdot S_2=\frac{1}{4}(3-my_1)(3-my_2)\cdot|y_1y_2|=\frac{1}{4}[9-3m(y_1+y_2)+m^2y_1y_2]\cdot|y_1y_2|$

$=\frac{1}{4}\left[9-3m\left(-\frac{2m}{m^2+4}\right)+m^2\left(-\frac{3}{m^2+4}\right)\right]\cdot\frac{3}{m^2+4}=\frac{9(m^2+3)}{(m^2+4)^2}$. ……………………………… 10 分

所以 $\sqrt{S_1\cdot S_2}=\frac{3\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}$，故$\frac{\sqrt{S_1\cdot S_2}}{S}=\frac{\frac{3\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}}{\frac{6\sqrt{m^2+3}}{m^2+4}}=\frac{1}{2}$，……………………………… 11 分

即 $2\sqrt{S_1\cdot S_2}-S=0$.

故存在实数 $\lambda=2$，使得 $\lambda\sqrt{S_1\cdot S_2}-S=0$ 成立. ……………………………… 12 分

21.**解**：(1)当 $b=0$ 时，$f(x)=\left(ax-\frac{3}{4}\right)e^x$，

所以 $f'(x)=ae^x+\left(ax-\frac{3}{4}\right)e^x=\left(ax+a-\frac{3}{4}\right)e^x$. ……………………………… 1 分

①当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得，$x=\frac{3}{4a}-1$，

当 $x\in\left(-\infty,\frac{3}{4a}-1\right)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{4a}-1\right)$ 上单调递增，

当 $x\in\left(\frac{3}{4a}-1,+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{3}{4a}-1,+\infty\right)$ 上单调递减. …………………………………… 2 分

②当 $a=0$ 时，$f'(x)=-\frac{3}{4}e^x$，对任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减. …………………………………… 3 分

③当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$ 得，$x=\frac{3}{4a}-1$，

当 $x\in\left(-\infty,\frac{3}{4a}-1\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{3}{4a}-1\right)$ 上单调递减，

当 $x\in\left(\frac{3}{4a}-1,+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{3}{4a}-1,+\infty\right)$ 上单调递增. …………………………………… 4 分

(2)当 $b=1$ 时，$f(x)=\left(ax-\frac{3}{4}\right)e^x-\frac{e^x}{e^x+1}$，

所以 $f'(x)=ae^x+\left(ax-\frac{3}{4}\right)e^x-\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\left[ax+a-\frac{3}{4}-\frac{1}{(e^x+1)^2}\right]e^x$. …………………………………… 5 分

设 $g(x)=ax+a-\frac{3}{4}-\frac{1}{(e^x+1)^2}$，则 $g'(x)=a+\frac{2e^x}{(e^x+1)^3}$. …………………………………… 6 分

①当 $a<0$ 时，$f(1)=\left(a-\frac{3}{4}\right)e-\frac{e}{e+1}<-\frac{3e}{4}<-\frac{5}{4}$，

与对任意的 $x\in[-2,+\infty)$，$f(x)\geqslant-\frac{5}{4}$ 恒成立矛盾，不合题意. …………………………………… 7 分

②当 $0\leqslant a<1$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $g(0)=a-1<0$，$g\left(\frac{7}{4a}-1\right)=a\left(\frac{7}{4a}-1\right)+a-\frac{3}{4}-\frac{1}{\left(e^{\frac{7}{4a}-1}+1\right)^2}=1-\frac{1}{\left(e^{\frac{7}{4a}-1}+1\right)^2}>0$.

故存在 $x_0\in\left(0,\frac{7}{4a}-1\right)$，使得 $g(x_0)=0$，故当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<0$，此时 $f'(x)<0$，

$f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减，所以 $f(x)<f(0)=-\frac{5}{4}$，不合题意. …………………………………… 9 分

③当 $a=1$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增.又因为 $g(0)=a-1=0$，

故当 $x\in[-2,0)$，$g(x)<0$，此时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $[-2,0)$ 上单调递减，

当 $x\in(0,+\infty)$，$g(x)>0$，此时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)\geqslant f(x)_{\min}=f(0)=-\frac{5}{4}$，满足题意. …………………………………… 10 分

④当 $a>1$ 时，$g'(x)>0$，故 $g(x)$ 在 $[-2,+\infty)$ 上单调递增.

又因为 $g(0)=a-1>0$，$g(-1)=-\frac{3}{4}-\frac{1}{(e^{-1}+1)^2}<0$，

故存在 $x_0\in(-1,0)$，使得 $g(x_0)=0$，

故当 $x\in(x_0,0)$ 时，$g(x)>0$，此时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(x_0,0)$ 上单调递增，

所以 $f(x)<f(0)=-\frac{5}{4}$，不合题意. …………………………………… 11 分

综上，$a=1$. …………………………………… 12 分

22.**解**：(1)由直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=6-\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t,\end{cases}$

消参得直线 l 的普通方程为：$x+\sqrt{3}y-6=0$. …………………………………… 2 分

由曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=6\cos\theta$，

得 $\rho^2=6\rho\cos\theta$，因为 $\rho=x^2+y^2$，$\rho\cos\theta=x$，所以 $x^2+y^2=6x$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为 $(x-3)^2+y^2=9$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为曲线 C 的圆心 $(3,0)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|3-0-6|}{\sqrt{1+3}}=\dfrac{3}{2}$，

而⊙C 的半径 $r=3$，

所以 $|AB|=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{9-\dfrac{9}{4}}=3\sqrt{3}$.

又点 P 到直线 l 距离的最大值为 $d_1=r+d=3+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{2}$，

所以△PAB 面积的最大值为 $\dfrac{1}{2}\times d_1\times|AB|=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{9}{2}\times3\sqrt{3}=\dfrac{27\sqrt{3}}{4}$. …………………………………… 10 分

23.**解**：(1) $f(x)=|x+1|+|2x-4|=\begin{cases}-3x+3(x\leqslant-1),\\-x+5(-1<x<2),\\3x-3(x\geqslant2),\end{cases}$

由 $f(x)\geqslant6$ 解得 $x\leqslant-1$ 或 $x\geqslant3$.

∴原不等式的解集为 $(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 a,b,c 为正实数，且满足 $a+2b+4c=8$，

所以 $(a+2b+4c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=1+2+4+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}+\dfrac{2b}{a}+\dfrac{4c}{a}+\dfrac{2b}{c}+\dfrac{4c}{b}$

$=7+\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{2b}{a}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{4c}{a}\right)+\left(\dfrac{2b}{c}+\dfrac{4c}{b}\right)$

$\geqslant7+2\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{2b}{a}}+2\sqrt{\dfrac{a}{c}\cdot\dfrac{4c}{a}}+2\sqrt{\dfrac{2b}{c}\cdot\dfrac{4c}{b}}=11+6\sqrt{2}$，

当且仅当 $a^2=2b^2=4c^2$，即 $a=\sqrt{2}b=2c$，$a=\dfrac{8}{3+\sqrt{2}}$，$b=\dfrac{4\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$，$c=\dfrac{4}{3+\sqrt{2}}$时取等号，

所以 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$的最小值为$\dfrac{11+6\sqrt{2}}{8}$. …………………………………………………………………… 10 分