长春市 2023 届高三质量监测（四）

数　　学

本试卷共 4 页. 考试结束后，将答题卡交回.

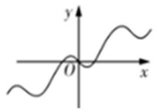
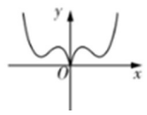
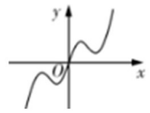
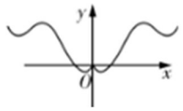
注意事项：
1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在考生信息条形码粘贴区.
2. 选择题必须使用 2B 铅笔填涂；非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整、笔迹清楚.
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效.
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑.
5. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀.

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{a,5-a,4\},B=\{3,2a+1\},A\cup B=\{2,3,4,5\}$，则 $a=$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 函数 $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$ 的图象可能是

A.  　B.  　C.  　D. 

3. 已知复数 $\mathrm{i}z=1+5\mathrm{i}$，则复数 $z+\bar{z}=$

A. -10　　B. 10　　C. -2　　D. 2

4. 某高中社会实践小组为课题“高中生作业情况研究”进行周末作业时长调研，利用课间分别对高一、高二、高三年级进行随机采访，按年级人数比例进行抽样，各年级分别有效采访 56 人、62 人、52 人，经计算各年级周末作业完成时间分别为（平均）3 小时、3.5 小时、4.5 小时，则估计总体平均数是

A. 3.54 小时　　B. 3.64 小时　　C. 3.67 小时　　D. 3.72 小时

5. 设 $m,n\in\{-2,-1,0,1,2,3\}$，曲线 C：$mx^2+ny^2=1$，则下列说法正确的为

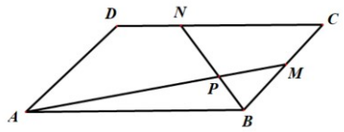
A. 曲线 C 表示双曲线的概率为 $\frac{1}{5}$　　B. 曲线 C 表示椭圆的概率为 $\frac{1}{6}$

C. 曲线 C 表示圆的概率为 $\frac{1}{10}$　　D. 曲线 C 表示两条直线的概率为 $\frac{1}{5}$

6. 我国古代数学家僧一行应用“九服晷影算法”在《大衍历》中建立了晷影长 l 与太阳天顶距 θ（$0^\circ<\theta<90^\circ$）的对应数表，这是世界数学史上最早的一整正切函数表. 根据三角学知识可知，晷影长度 l 等于表高 h 与太阳天顶距 θ 正切值的乘积，即 $l=h\tan\theta$，对同一“表高”两次测量，第一次和第二次太阳天顶距分别为 α、β，若第一次的“晷影长”是“表高”的 3 倍，且 $\tan(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}$，则第二次“晷影长”是“表高”的（　）倍

A. 1　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{5}{2}$　　D. $\frac{7}{2}$

7. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，M,N 分别为 BC,CD 上的点，且 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MC},\overrightarrow{CN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$，连接 AM,BN 交于 P 点，若 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PM},\overrightarrow{BP}=\mu\overrightarrow{PN}$，则 $\lambda+\mu=$



A. $\frac{13}{5}$　　B. $\frac{25}{7}$　　C. $\frac{18}{5}$　　D. $\frac{19}{5}$

8. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 M，N 分别为线段 AB_1，AC 上的动点，点 T 在平面 BCC_1B_1 内，则 $|MT|+|NT|$ 的最小值是

A. $\sqrt{2}$　　B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　D. 1

二、多选题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中有多个选项是符合题目要求的.

9. 若 $(x^2-\frac{1}{2x})^n$ 的展开式中第 5 项与第 6 项的二项式系数相等，则下列说法正确的是

A. $n=9$　　B. 展开式中各项系数和为 $\frac{1}{512}$

C. 展开式中常数项为 $\frac{21}{16}$　　D. 展开式中各二项式系数和为 $-\frac{1}{256}$

10. 有两批种子，甲批种子 15 粒，能发芽的占 80%，乙批种子 10 粒，能发芽的占 70%，则下列说法正确的有

A. 从甲批种子中任取两粒，至少一粒能发芽的概率是 $\frac{34}{35}$

B. 从乙批种子中任取两粒，至多一粒能发芽的概率是 $\frac{7}{15}$

C. 从甲乙两批中各任取一粒，至少一粒能发芽的概率是 $\frac{47}{50}$

D. 如果将两批种子混合后，随机抽出一粒，能发芽的概率为 $\frac{19}{25}$

11. 下列命题中正确的是

A. 已知随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且满足 $P(X\leqslant 6)=P(X\geqslant 2)$，则 $\mu=4$

B. 已知一组数据：7，8，4，7，2，4，5，8，6，4，则这组数据的第 60 百分位数是 6

C. 已知随机变量 $X\sim B(12,\frac{2}{3})$，则 $D(3X-1)=24$

D. 某学校有 A,B 两家餐厅，某同学第 1 天午餐时间随机地选择一家餐厅用餐，如果第 1 天去 A 餐厅，那么第 2 天去 A 餐厅的概率为 0.8，如果第一天去 B 餐厅，那么第 2 天去 B 餐厅的概率为 0.4，则该同学第 2 天去 B 餐厅的概率为 0.3

12. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且有 $S_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$，则下列结论正确的是

A. $a_1=\frac{1}{2}$　　B. 数列 $\{S_n\}$ 为等差数列

C. $S_{36}=6$　　D. $a_2+a_3+a_4=1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知 $a=\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{\sqrt{2}}{2}$，$b=(\frac{\sqrt{2}}{2})^{-\frac{\sqrt{3}}{3}}$，$c=\ln\sqrt{\frac{1}{e}}$，则 a,b,c 的大小关系为_____.

14. 若 $a,b\in\mathbf{R}$，$ab>0$，则 $\frac{4a^4+b^4+4}{ab}$ 的最小值为_____.

15. 已知不等式 $(ax-\ln x)[x^2-(a+1)x+1]\geqslant 0$ 对任意 $x>0$ 恒成立，则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知圆 C 的圆心在抛物线 $x^2=2py(p>0)$ 上运动，且圆 C 过定点 $A(0,p)$，圆 C 被 x 轴所截得的弦为 MN，设 $|AM|=m$，$|AN|=n$，则 $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}$ 的取值范围是_____.

四、解答题：共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. （本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+2\cos^2\frac{\omega x}{2}+m$（$\omega>0$）的最小值为 -2.

（1）求函数 $f(x)$ 的最大值；

（2）把函数 $y=f(x)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{6\omega}$ 个单位，可得函数 $y=g(x)$ 的图像，且函数 $y=g(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{8}]$ 上为增函数，求 ω 的最大值.

18. （本小题满分 12 分）

已知数列 $\{\sqrt{a_n}\}$ 是公差为正数的等差数列，且 $a_1+a_3=10$，$a_2=4$.

（1）求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）求证：$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_n+a_{n+1}}<\frac{n}{2n+2}$.

19. （本小题满分 12 分）

现有两个口袋，A 口袋中有 m 个球，一部分是红球，另一部分是白球，从中取出一个球恰好是白球的概率为 $\frac{2}{3}$，B 口袋中有 6 个球，4 个红球，2 个白球.若将两个口袋混合在一起，从中取出一个球，恰好是白球的概率为 $\frac{4}{9}$.

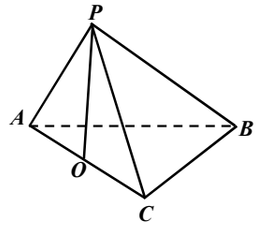
（1）若甲从 B 口袋中每次有放回地取一个球，直到取到白球停止，则恰好第三次后停止的概率；

（2）甲乙两人进行游戏，由第三人从两个口袋中各取一个球，若同色甲胜，否则乙胜，通过计算说明这个游戏对两人是否公平；

（3）从 B 口袋中一次取 3 个球，取到一个白球得 2 分，取到一个红球得 1 分，求得分的期望.

20. （本小题满分 12 分）

在三棱锥 $P-ABC$，底面 $\triangle ABC$ 是边长为 4 的正三角形，平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，且 $PA=PC$.



（1）若 $PA=\sqrt{10}$，求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PBC；

（2）若 $PO\perp$ 底面 ABC，垂足为 O，$PO=2$，求平面 PBC 与平面 PAB 夹角的余弦值.

21. （本小题满分 12 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，四个顶点构成的四边形面积为 $2\sqrt{2}$.

（1）求椭圆方程；

（2）若直线 $y=kx+m$ 交椭圆于 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，且 $S_{\Delta AOB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求证 $x_1^2+x_2^2$ 为定值.

22. （本小题满分 12 分）

函数 $f(x)=\ln(x+1)$.

（1）求证 $\forall x\geqslant 0$：$f(x)\leqslant\frac{x}{\sqrt{x+1}}$；

（2）若方程 $f(x)=k\sqrt{x}$ 恰有两个根，求证：$\frac{4}{5}<k<\frac{\sqrt{3}}{2}$.