

2023 届普通高等学校招生全国统一考试

河南名校联盟大联考(2月)

数学(文科)

全卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 3\}$, $B = \{x \mid -2 < x \leq 1\}$, 则 $A \cap B =$ ()
 A. $[0, 2]$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{0, 1, 2\}$ D. $\{0, 1\}$
2. 已知复数 $z = (1 - 2i)(1 + bi)$, 若 z 的共轭复数 $\bar{z} = 7 - i$, 则实数 $b =$ ()
 A. 1 B. 2 C. 3 D. -1
3. 已知三角形数表:

				1				
				1	2			
				1	2	4		
				1	2	4	8	
							
				1	2	4	8	$\dots 2^{k-1}$
							

- 现把数表按从上到下、从左到右的顺序展开为数列 $\{a_n\}$, 则 $a_{50} =$ ()
 A. 16 B. 32 C. 64 D. 512
4. 一组互不相等的样本数据: $x_1, x_2, \dots, x_n, n \geq 3$, 其平均数为 \bar{x} , 方差为 s^2 , 极差为 m , 中位数为 t , 去掉其中的最小值和最大值后, 余下数据的平均数为 \bar{x}' , 方差为 s'^2 , 极差为 m' , 中位数为 t' , 则下列结论不一定正确的是 ()
 A. $\bar{x} = \bar{x}'$ B. $s^2 > s'^2$ C. $m > m'$ D. $t = t'$
 5. 在《九章算术》中, 底面为矩形的棱台被称为“刍童”. 已知棱台 $ABCD - A'B'C'D'$ 是一个侧棱相等、高为 1 的“刍童”, 其中 $AB = 2A'B' = 2$, $BC = 2B'C' = 2\sqrt{3}$, 则该“刍童”外接球的体积为 ()
 A. 20π B. $\frac{20}{3}\pi$ C. $\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$ D. $5\sqrt{5}\pi$

6. 已知抛物线 $C: x^2 = 2y$ 的焦点为 F , 过 F 作倾斜角为 120° 的直线 l , 与抛物线 C 交于 M, N 两点, 则 $|MN| =$ ()

- A. 4 B. $4\sqrt{3}$ C. 8 D. 16

7. 已知定义在 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $\forall a, b \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty), f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$, 且当 $x \in (0, 1)$ 时, $f(x) > 0$, 则下列说法正确的是 ()

- A. $f(x)$ 是奇函数但不是偶函数
 B. $f(x)$ 是偶函数但不是奇函数
 C. $f(x)$ 既是奇函数又是偶函数
 D. $f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数

8. 已知 $a = \lg 8, b = \log_3 2, c = \log_{12} 10, d = 3^{0.01}$, 则 ()

- A. $c < b < a < d$ B. $d < a < c < b$ C. $a < b < c < d$ D. $b < a < c < d$

9. 已知过点 $P(1, 2)$ 可作出双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条切线, 若两切点都在双曲线 C 的某一支上, 则该双曲线的离心率的取值范围为 ()

- A. $(1, \sqrt{3})$ B. $(\sqrt{3}, +\infty)$ C. $(1, \sqrt{5})$ D. $(\sqrt{5}, +\infty)$

10. 已知实数 $a, b > 0$, 若 $a + 2b = 1$, 则 $\frac{3a}{b} + \frac{1}{ab}$ 的最小值为 ()

- A. 12 B. $2\sqrt{3}$ C. $6\sqrt{3}$ D. 8

11. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上存在零点, 且函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的值域 $M \subseteq [-\sqrt{2}, 2]$, 则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left[\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right]$ B. $\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{4}\right]$ C. $\left[\frac{1}{8}, \frac{4}{3}\right]$ D. $\left[\frac{1}{8}, 1\right]$

12. 已知函数 $f(x) = a \ln(x+1) + 1 (a \in \mathbf{R})$ 的图象恒过定点 A , 圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上的两点 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 满足 $\overrightarrow{PA} = \lambda \overrightarrow{AQ} (\lambda \in \mathbf{R})$, 则 $|2x_1 + y_1 + 7| + |2x_2 + y_2 + 7|$ 的最小值为 ()

- A. $2\sqrt{5}$ B. $7 + \sqrt{5}$ C. $15 - \sqrt{5}$ D. $30 - 2\sqrt{5}$

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $a = (1, 2), b = (2, 1)$, 且 $(a+b) \perp (a-\lambda b)$, 则实数 $\lambda =$ _____.

14. 已知 $\alpha \in (0, \pi), \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 则 $\cos 4\alpha =$ _____.

15. 在底面边长为 2, 侧棱长为 3 的正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, E, F 分别为棱 BC, AB 的中点, 点 D 在棱 CC_1 上, 且 $CD = 2$, 若平面 ABC_1 与平面 AED 的交线为 l , 则 l 与直线 C_1F 所成角的余弦值为 _____.

16. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 若 $\exists x_0 \in D$, 使得 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的不动点. 若函数 $f(x) = \ln(e^{2x} + ae^x + 2)$ 在区间 $[0, 1]$ 上存在不动点, 则实数 a 的取值范围是 _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一)必考题：共 60 分。全科试题免费下载公众号《高中僧课堂》

17. (12 分)

自限性疾病是指在发展到一定阶段后会自行恢复的疾病。已知某种自限性疾病在不用药物的情况下一般 10 天后就可康复。现在只有 A 药物是针对该自限性疾病的药物，为了解 A 药物对该自限性疾病的作用，研究者在患过该自限性疾病且康复的群体中随机选取了 110 人作为样本进行调查，并统计相关数据后得到如下的 2×2 列联表。已知在选取的 110 人中随机抽取 1 人，此人为小于 10 天康复者的概率为 $\frac{5}{11}$ ，此人为未用药物者的概率为 $\frac{6}{11}$ 。

康复情况 \ 用药情况	小于 10 天康复	10 天后康复	合计
患病期用 A 药物	30		
患病期未用药物			
合计			110

(1)请完成上面的列联表；

(2)依据 2×2 列联表中的数据，判断能否有 99% 的把握认为患病期用 A 药物与小于 10 天康复有关。

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}, n = a+b+c+d.$$

$P(K^2 \geq k_0)$	0.100	0.050	0.010	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

18. (12 分)

已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_2 + a_3 = 6, S_3 = 7$ 。

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

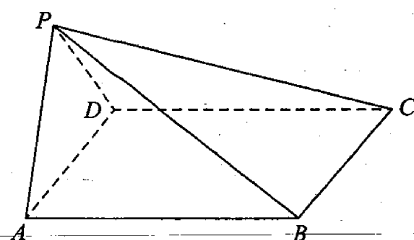
(2)记 $b_n = S_n^2$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 的值。

19. (12 分)

在四棱锥 $P-ABCD$ 中， $PA = PD = AB = BC = CD = DA = 2, \angle DAB = 60^\circ$ 。

(1)若 $PC = \sqrt{10}$ ，证明：平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$ ；

(2)若直线 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$ ，求四棱锥 $P-ABCD$ 的体积。



20. (12分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右顶点分别为 $A_1(-2, 0), A_2(2, 0)$, 过点 $D(1, 0)$ 的

直线 l 与椭圆 C 交于异于 A_1, A_2 的 M, N 两点, 当 l 与 x 轴垂直时, $|MN| = \sqrt{6}$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 若直线 A_1M 与直线 A_2N 交于点 P , 证明点 P 在定直线上, 并求出该定直线的方程.

21. (12分)

已知函数 $f(x) = ax + b, g(x) = e^{x-1}, a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1, b=0$ 时, 求函数 $F(x) = f(x) \cdot g(x)$ 的极值;

(2) 若 $g(x) \geq f(x)$ 恒成立, 求 $a-b$ 的最小值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修 4-4: 坐标系与参数方程] (10分)

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2}t, \\ y = 2 + \sqrt{2}t \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C_1 的参数方

程为 $\begin{cases} x = 2 + \sqrt{2} \cos \alpha, \\ y = \sqrt{2} \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线

C_2 的极坐标方程为 $\rho \sin^2 \theta = 4 \cos \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程;

(2) 直线 l 与曲线 C_1, C_2 分别交于不同于原点的 A, B 两点, 求 $|AB|$ 的值.

23. [选修 4-5: 不等式选讲] (10分)

已知函数 $f(x) = \left| x + \frac{3}{a} \right| + |x - a|, a \in \mathbf{R}$ 且 $a \neq 0$.

(1) 若 $f(x) \geq 4$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 证明: $f(3) \geq 4$.